Exercices de colle

Léonard Blier et Jonathan Laurent

16 février 2016

Table des matières

1 Théorie des ensembles

1.1 Caractérisation fonctionnelle de l'injectivité

1. Soient E et F des ensembles, et $f : E \to F$ une fonction injective.
   Soit G un ensemble, et $g : E \to G$ une fonction quelconque.
   Montrer qu'il existe une fonction $h : F \to: G$ telle que $g = h \circ f$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & F \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ G & \end{tikzcd}$$

2. Réciproquement, supposons que f n'est pas injective. Construire un ensemble G et une fonction g telle qu'on ne puisse pas construire une telle fonction h

1.2 Caractérisation fonctionnelle de la surjectivité

1. Soient E et F des ensembles, et $f : E \to F$ une fonction surjective.
   Soit G un ensemble, et $g : F \to G$ une fonction quelconque.
   Montrer qu'il existe une fonction $h : E \to: G$ telle que $h = g \circ f$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "h"'] & F \arrow[dl, "g"'] \\ G & \end{tikzcd}$$

2. Réciproquement, supposons que f n'est pas surjective. Construire un ensemble G et une fonction g telle qu'on ne puisse pas construire une telle fonction h

1.3 Caractérisation fonctionnelle des ensembles infinis

Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si pour toute fonction $f : E \to E$, il existe $A \subset E$ tel que A est stable par f.

1.4 Une preuve du théorème de Cantor-Bernstein

On rappelle le théorème de Cantor-Bernstein :

Théorème 1. *Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. Alors il existe $h : E \to F$ une bijection. Autrement dit, si E s'injecte dans F et F s'injecte dans E, alors ces deux ensembles sont equipotents.*

Les définitions sont ici très formelles, car c'est la manière la plus rigoureuse de rédiger. On s'attachera à bien faire comprendre les définitions.

Soit $x \in E$. On définit $(u_n(x))_n$ la suite (éventuellement finie) de $E \bigcup F$ définie par :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x \\ u_{2n+1} &= g^{-1}(u_{2n}) \text{ si cela a un sens} \\ u_{2n} &= f^{-1}(u_{2n-1}) \text{ si cela a un sens} \end{aligned}$$

On définit de même les suites $(v_n(y))_n$ pour tout $y \in F$.

On définit :

$$\begin{aligned} E_\infty &:= \{x \in E | (u_n(x)) \text{ est infinie}\} \\ E_E &:= \{x \in E | (u_n(x)) \text{ finit en } E\} \\ E_F &:= \{x \in E | (u_n(x)) \text{ finit en } F\} \end{aligned}$$

On fait de même pour F_∞, F_E, F_F.

1. Montrer que (F_∞, F_E, F_F) est une partition de F, et que (E_∞, E_E, E_F) est une partition de E (dont certaines des parties sont éventuellement vides).
2. Construire une bijection entre E_∞ et F_∞.
3. Construire des bijections entre E_E et F_E d'une part, et E_F et F_F d'autre part.
4. En conclure le théorème de Cantor-Bernstein.

2 Relations d'ordre, relations d'équivalence

2.1 Recouvrements d'ensemble

Soit E un ensemble. On dit que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de E si $\forall i \in I, U_i \subset E$ et $\bigcup_i U_i = E$.

1. Une partition est-elle un recouvrement ? Un recouvrement est-il une partition. Soit X un ensemble. $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ est-il un recouvrement de X ?
2. Soient $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_j)_{j \in J}$ deux recouvrements. On dit que (U_i) est plus fin que (V_j) si $\forall i \in I, \exists j \in j \ U_i \subset V_j$. Cette relation forme-t-elle une relation d'ordre ? Montrer qu'il existe un recouvrement "maximal" qui soit plus fin que (U_i) et (V_j). Maximal signifie que tout recouvrement vérifiant la propriété sera plus fin que celui-ci.
3. Soit X un ensemble, et soient $f_i : U_i \to X$ des fonctions. Montrer l'équivalence suivante :

(i) $\forall i, j \in I, \forall x \in U_i \cap U_j, f_i(x) = f_j(x)$
(ii) Il existe $f : E \to X$ telle que $\forall i \in I, \forall x \in U_i, f(x) = f_i(x)$

2.2 Ensembles totalement ordonnés dénombrables

Montrer que tout ensemble dénombrable totalement ordonné est isomorphe (en tant que qu'ensemble ordonné) à un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

2.3 Relation d'équivalence sur les fonctions réelles

On considère l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes s'il existe $c > 0$ tel que $\forall x > c, f(x) = g(x)$. Montrer que cette relation est bien une relation d'équivalence.

2.4 Treillis complet

Soit $(E, <)$ un ensemble (partiellement) ordonné. On dit que E est un treillis complet si tout sous ensemble de E possède une borne supérieure.

1. Les ensembles suivants munis de leur relation d'ordre canonique sont-ils des treillis complet ? $[0,1],]0,1[, \mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathcal{X})$ (où X est un ensemble quelconque).
2. Soit $(E, <)$ un treillis complet. Soit f une fonction croissante de E dans E. Montrer que f possède un point fixe.
   Indication : On introduira $A = \{x \in E | x \leq f(x)\}$
3. En déduire que toute application croissante de $[0,1]$ dans lui-même possède un point fixe.
4. On se sert de ce résultat pour démontrer le théorème de Cantor Bernstein. Soient E et F deux ensembles, f et g des injections de E dans F et de F dans E. On définit

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{P}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{E}) \\ & M & \longmapsto & (E \backslash g(F \backslash f(M))) \end{array}$$

   Montrer que Φ possède un point fixe M. Construire une bijection entre M et $f(M)$ d'une part, et entre $E \backslash M$ avec $F \backslash f(M)$ d'autre part. En déduire le théorème de Cantor Bernstein.

2.5 Fonction entre classes d'équivalence

Soient E et F des ensembles, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $\mathcal{S}$ une relation d'équivalence sur F. Soit f une fonction de E dans F. Donner une condition nécessaire et suffisante telle qu'il existe $\hat{f}$ telle que ce diagramme commute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & F \arrow[d, "q"] \\ E/\mathcal{R} \arrow[r, "\hat{f}"] & F/\mathcal{S} \end{tikzcd}$$

où p et q sont les projections canoniques.

3 Fonctions usuelles, convexité

3.1 Inégalité sur l'exponentielle

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, on a :

$$e^x \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \tag{3.1}$$

3.2 Tangente et polynomes

Montrer que toutes les dérivées successives de $x \to \tan(x)$ peuvent s'exprimer comme un polynome en $\tan(x)$.

3.3 Entropie et Divergence de Kullback-Leibler

Soit $p = (p_1, ..., p_n)$ un n-uplet tel que $\forall i,\ 0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n} = 1$.

Ce n-uplet s'interprète comme une distribution de probabilité sur un ensemble fini.

On définit l'entropie de cette distribution par :

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i) \tag{3.2}$$

— Montrer que $H(p) \geq 0$

— Énoncer l'inégalité de Jensen. En déduire une borne supérieure pour $H(p)$, et déterminer une distribution où elle est atteinte

On a maintenant deux distributions de probabilité p et q. On définit la divergence de Kullback-Leibler par :

$$D(p,q) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(q_i) - H(p) \tag{3.3}$$

— Montrer que $D(p,q)$ est positive.

— Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $D(p,q) = 0$

4 Equations différentielles

4.1 Equation de Bernoulli

On considère une modélisation de l'évolution d'une population. L'équation la définissant est :

$$N'(t) = aN(t)(1 - \frac{N}{N_{max}})$$

où $a, N_{max} \in \mathbb{R}_+$.

Trouver toutes les solutions de cette équation.

4.2 Solutions des équations linéaires d'ordre quelconques.

Soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

On considère le polynome $P(X) = a_n X^n + ...a_1 X + a_0$, et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines (supposées distinctes). Montrer que pour tout n-uplet $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$, la fonction $t \to \sum_i \mu e^{\lambda_i}$ est solution de l'équation différentielle.

En déduire toutes les solutions complexes et réelles de l'équation :

$$y^{(3)} = y$$

4.3 Equations différentielles et involutions

Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f'(x) = f(a - x)$$

4.4 Résolution générale des équations linéaires d'ordre 1

Le but de ce très court exercice est de voir que la résolution des équations linéaires d'ordre 1 se ramène toujours à un simple calcul de primitive.

On considère a, b, c trois fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui ne s'annulent pas.

Exprimer en fonction de a, b, c les solutions de l'équation :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

5 Suites réelles

5.1 Suites entières

Soit (u_n) une suite à valeur dans $\mathbb{N}$.

— Montrer que si (u_n) converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang.

— Montrer que si (u_n) est injective, alors elle tend vers $+\infty$

5.2 limsup, liminf

Soit(u_n) une suite réelle. On définit (v_n) et (w_n) à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ par :

$$v_n = \sup_{k \geq n}\{u_k\}$$
$$w_n = \inf_{k \geq n}\{u_k\}$$

— Montrer que (v_n) et (w_n) convergent. On

On notera $\limsup(u) = \lim_n v_n$ et $\liminf(u) = \lim_n w_n$.

— Montrer que si $\limsup(u) = \liminf(u)$, alors u converge.

— Montrer que si u converge, $\limsup(u) = \liminf(u) = lim_n u_n$

— Montrer que $\limsup(u)$ et $\liminf(u)$ sont des valeurs d'adhérence de (u_n).

5.3 Une généralisation du théorème de Césaro

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On suppose que $a_n \to a \in \mathbb{R}$ et $b_n \to b \in \mathbb{R}$. On pose :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Montrer que C_n converge, et déterminer sa limite.

5.4 Séries

Soit (u_n) une suite. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et $\tilde{S_n} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$.

Montrer que si $\tilde{S_n}$ converge vers une limite finie, alors S_n également. On montrera pour cela que c'est une suite de Cauchy.

5.5 Fonction contractante

Pour cet exercice, il faut d'abord traiter (ou admettre) l'exercice précédent.

On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est contractante si il existe $0 < c < 1$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| < c|x - y|$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit (u_n) par :

$$\begin{aligned} u_0 &= x \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{aligned}$$

Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ décroit "exponentiellement" vers 0. En déduire que u_n converge vers un point fixe de f.

Montrer que ce point fixe est unique.

5.6 Caractérisation des ensembles de valeurs d'adhérence

Soit u une suite réelle. On note $\Lambda(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de u, éventuellement dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Le but de l'exercice est de caractériser les ensembles qui peuvent s'écrire comme $\Lambda(u)$ pour une suite réelle donnée.

- Soient $E = x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Construire u telle que $\Lambda(u) = E$
- Même question, mais en supposant cette fois $x_1, ..., x_n \in \overline{\mathbb{R}}$
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe u suite réelle telle que $\Lambda(u) = [a, b]$. Généraliser au cas où a et b sont éventuellement infinis.
- Soient $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$ des ensembles pouvant s'exprimer comme les ensembles de valeurs d'adhérences de suites réelles. Montrer qu'il existe u une suite réelle telle que $\Lambda(u) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Lambda_i$
- Soit $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensemble, pouvant tous s'exprimer comme des ensembles de valeurs d'adhérences. Montrer qu'il existe u une suite réelle telle que $\Lambda(u) = \bigcap_i \Lambda_i$

5.7 Suite à variation décroissante

Soit u une suite réelle, telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est $\big[\liminf(u), \limsup(u)\big]$.

6 Fonctions continues

6.1 Unique antécédent

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que chaque y réel admet au plus deux antécédents.

Montrer qu'il existe un y réel qui possède un unique antécédent.

6.2 Involution dans $\mathbb{R}_+$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, telle que $f \circ f = Id$. Déterminer f.

6.3 Continuité de fonction croissante

Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue.

6.4 Borne supérieure glissante

Soit f une fonction réelle continue. Soit g définie par :

$$g(x) = \sup_{t \in [x, x+1]} f(t) \tag{6.1}$$

Montrer que g est continue.

6.5 Fonction réelle surjective

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.
Soit y un réel. Montrer que l'équation $y = f(x)$ admet une infinité de solutions.

6.6 Continuité et convergence uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f. Montrer que f est continue.

6.7 Semi-Continuité

1. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions continues et bornées. La fonction $\inf_i f_i$ est-elle continue ?
2. On dit d'une fonction f qu'elle est semi-continue supérieurement si :

$$\forall a, \forall \epsilon > 0, \exists \eta,\ \forall x, |x - a| < \eta \Rightarrow\ f(x) \leq f(a) + \epsilon$$

   (a) Donner un exemple de fonction non continue mais continue supérieurement.
   (b) Montrer que si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions continues supérieurement et bornées, alors $\inf_i f_i$ est continue supérieurement.

6.8 Caractérisation par les ouverts

Montrer qu'une fonction réelle est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

7 Dérivabilité

7.1 Croissante sur un voisinage ?

Soit f une fonction $C^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f'(0) > 0$. Existe-t-il un voisinage I de 0 tel que f est strictement croissante sur I ?

Le résultat est-il vrai si on suppose uniquement f dérivable ?

7.2 Bornes d'une intégrale

Montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{\phi(x)} e^{t^2} = 1$$

Montrer que ϕ est C^1.

7.3 Surjectivité des tangentes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x \notin [a,b]$. Montrer qu'il existe une tangente à f passant par x.

7.4 Minoration de la dérivée seconde

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^2 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$, et $f(1) = 1$.

Montrer qu'il existe c tel que $|f''(c)| \geq 4$.

8 Développements limités et analyse asymptotique

8.1 Questions courtes

— Montrer que les coefficients pairs du $DL_n(0)$ d'une fonction impaire sont nuls.

— Commenter le $DL_2(0)$ d'une fonction $\mathcal{C}^2$ qui admet un minimum local strict en 0.

8.2 Convergence simple de la série de Taylor de sinus

Notons T_n le développement limité de sinus en 0. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sin(x)$$

8.3 Racines imbriquées

Trouver un équivallent de $u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$. On peut poser les questions intermédiaires suivantes :

1. Montrer que $u_n \to_{n\to\infty} \infty$.
2. Montrer que $u_n \leq n$.
3. Montrer que $u_n = O(\sqrt{n})$.
4. Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$

8.4 Développement asymptotique des solutions d'une equation

Montrer que pour tout n entier naturel, il existe une unique solution à l'équation $e^x + x = n$.

On appelle cette solution x_n.

Déterminer la limite de x_n.

Déterminer son développement asymptotique à trois termes.

8.5 Un calcul de limite

Soient $x_1, ..., x_n > 0$.

Calculer la limite quand $\alpha \leftrightarrow 0$ de

$$\sqrt[\alpha]{\frac{x_1^\alpha + ... + x_n^\alpha}{n}}$$

8.6 Arccosinus

Déterminer le développement asymptotique de arccos en 1.

9 Arithmétique

9.1 Questions courtes

- Combien y a-t-il de zéro terminaux dans l'écriture en base 10 de 100!
- Montrer que la somme des cubes de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 9
- Montrer que si 2^{n-1} est premier alors n est premier

9.2 Critère d'Euler

Soit $p > 2$ un nombre premier et $a \in (Z/pZ)^*$. Montrer que a est un carré si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

9.3 Somme de parties entières

Soient n et m deux entiers premiers entre eux. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor = \frac{(m-1)(1-1)}{2}$$

10 Groupes

10.1 Formule de Legendre

One note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n, soit la puissance maximale de p qui divise n.

Montrer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbb{N}^\star} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{10.1}$$

10.2 Sommes d'inverses

On note $S(m,n) = \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i}$. Montrer que les seuls n, m tels que $S(n,m) \in \mathbb{N}$ sont $n = m = 1$

10.3 PGCD et suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci par $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$, $\phi_0 = 0$ et $\phi_1 = 1$.

— Montrer que $\phi_{n+1} \wedge \phi_n = 1$
— Montrer que $\phi_{n+m} = \phi_m \phi_{n+1} + \phi_{m-1}\phi_n$
— En déduire que $\phi_{kn+r} \wedge \phi_n == \phi_r \wedge \phi_n$
— En conclure que $\phi_n \wedge \phi_m = \phi_{n \wedge m}$

10.4 Parties stables de $\mathbb{N}$

On prend une partie P stable par addition. Montrer qu'il existe n, k tels que $P \cap [n, \infty[= k\mathbb{N} \cap [n, \infty[$.

10.5 Infinité des nombres premiers

— Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini
— Montrer que l'ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 est infini.

11 Groupes, anneaux, corps

11.1 Questions courtes

— Montrer que le centre d'un groupe G est un sous-groupe de G.
— Montrer que les éléments d'ordre fini d'un groupe abélien en forment un sous-groupe.
— Montrer que la table de multiplication d'un groupe fini est un carré latin (chaque élément du groupe apparait exactement une fois sur chaque ligne et chaque colonne).
— Montrer qu'un groupe dont tous les éléments sont d'ordre au plus 2 est commutatif.
— Trouver le plus petit entier n tel qu'un groupe de cardinal n n'est pas nécessairement abelien (pour $n = 4$, utiliser le point précédent).

11.2 Groupe dihedral

Soit $P = A_1 \cdots A_n$ un n-gone régulier. On note D_n l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ telles que $A_i A_j$ est une arrête de P si et seulement si $A_{\sigma(i)} A_{\sigma(j)}$ est une arrête de P.
— Quel est le cardinal de D_n ?
— Montrer que D_n admet une structure de groupe.
— Discuter l'ordre des éléments de D_n
  — Montrer que D_n admet un sous-groupe cyclique d'ordre n.
  — Montrer que D_n admet n éléments au moins d'ordre 2.
— Donner la table de multiplication de D_n
— D_n peut-il être abélien, si oui pour quels valeurs de n ?
— Combien de sous-groupes D_n admet-il exactement ?

11.3 Groupe des fonctions affines

Soit k un corps commutatif. On considère $E = k^* \times k$ muni de la loi :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y) \tag{11.1}$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe.

On considère $F = \{f : z \to az + b,\ a \in k^* b \in k\}$

Montrer que $(F, \circ)$ est un groupe.
Montrer qu'il est isomorphe à $(E, \star)$.

11.4 Sous-groupes maximaux

Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

On dit qu'un sous-groupe H de G est maximal s'il n'est strictement inclus dans aucun sous-groupe strict de G.

Déterminer tous les sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Z}, +)$.

Déterminer tous les sous-groupes maximaux de $(\mathbb{Q}, +)$.

12 Polynomes

12.1 Anneaux, quotients, polynomes, ...

Soit A un anneau, I un idéal de A.
On définit la relation $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Exemple : $A = \mathbb{Z}, I = n\mathbb{Z}$. Quelles sont les classes d'équivalence ?
- On définit :

$$\bar{a} \bar{+} \bar{b} := \overline{a + b} \tag{12.1}$$

$$\bar{a} \bar{\times} \bar{b} := \overline{a \times b} \tag{12.2}$$

  Montrer que $(A/\sim, \bar{+}, \bar{\times})$ est un anneau.
- Pour la suite, on prend k un corps et $A = k[X]$. On prend $P \in A$ et $I = Pk[X]$. Quelles sont les classes d'équivalences ? Quels sont les éléments inversibles ?
- Montrer que si P est irréductible dans k, alors $k[X]/P$ est un corps. On le notera k'.
- Montrer que k peut être vu comme un sous-corps de k'.
- Montrer que P en tant que polynome de k' possède une racine dans k'.
- Application : on prend $k = \mathbb{R}$ et $P = X^2 + 1$. Montrer que $\mathbb{R}[X]/P = \mathbb{C}$ en tant que corps.

12.2 Division de polynomes

Calculer la division euclidienne de $(\cos\theta + X \sin\theta)^n$ par $(X^2 + 1)$.

12.3 Nombre de solutions d'une équation

Soit P un polynome de $\mathbb{C}[X]$ de degré d. On définit $n(z)$ comme le nombre de solution à l'équation $P(x) = z$.

— Montrer que $n(z) = d - deg((P - z) \wedge P')$
— Montrer que $\sum_{z \in \mathbb{C}} d - n(z) = d - 1$

12.4 Minoration du module des racines

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$.
Soit z_0 une racine de P. Montrer que $|z_0| \leq 1 + \max(|a_i|)$.

13 Fractions rationnelles

13.1 (Quasi) surjectivité des fractions rationnelles

Montrer qu'une l'image d'une fraction rationnelle complexe est soit tout $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}$ privé d'un point.

13.2 Fraction rationnelle et longueurs d'intervalles

Soient $a_1, ..., a_n > 0$, et $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. On pose

$$f(x) = \sum_i \frac{a_i}{x - x_i}$$

On définit

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > \lambda)\}$$

.

— Montrer que $E(\lambda)$ est une union finie d'intervalles.
— Montrer que la somme des longueurs de ces intervalles vaut

$$\frac{1}{\lambda} \sum_i a_i$$

13.3 Calcul de série

Calculer

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \tag{13.1}$$

Solution : $1/4$

14 Espaces vectoriels

14.1 Exemples

On se place dans l'espace des fonctions réelles. Dire si ces ensembles sont ou non des sous-espaces vectoriels :

— L'ensemble des fonctions croissantes
— L'ensemble des fonctions monotones
— L'ensemble des fonctions périodiques de période 1
— L'ensemble des fonctions pouvant s'écrire comme la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
— L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie en ∞ et $-\infty$.

14.2 Quelques supplémentaires

Dans chaque exemple, montrer que F est un sous espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de F dans E.

— $E = K(X), F = K[X]$
— $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f : f(0) + f(1) = 0\}$
— $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f : f \text{ paire}\}$
— $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $F = \{f : \int_0^1 f = 0\}$
— [*] $E = \mathcal{C}^0(R, R)$, $F = \{f : \forall k,\ f(x_k) = 0\}$

14.3 Intersections, unions, sommes

Soit E un espace vectoriel, A et B des parties de E

— Comparer $Vect(A \cup B)$ et $Vect(A) + Vect(B)$
— Comparer $Vect(A \cap B)$ et $Vect(A) \cap Vect(B)$

14.4 Equation de Cauchy

On considère l'équation de Cauchy :

$$\forall x, y \in R,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

— Montrer que la restriction de toute solution à l'équation de Cauchy à $\mathbb{Q}$ est linéaire.
— Montrer que toute solution continue est linéaire.
— Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie.
— En admettant l'existence d'un supplémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, construire une solution non linéaire à l'équation de Cauchy.

14.5 Endomorphismes nilpotents

Soit E un espace de dimension n.

— Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.

— Soient $u_1, ..., u_n$ des endomorphismes nilpotents qui commutent. Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ ... \circ u_n = 0$.

14.6 Supplémentaire commun

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces de E de même dimension.

Montrer qu'ils admettent un supplémentaire commun.

14.7 Identité de Leibniz

On veut montrer l'identité de Leibniz à partir de l'identité de Newton dans un anneau quelconque. Pour cela, on introduit $E = \{f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ est à support fini}\}$. Pour f et g deux fonctions C^∞ et $\phi \in E$, on définit :

$$[\phi]_{f,g} = \sum_{i,j} \phi(i,j) f^{(i)} g^{(j)}$$

— Montrer que E peut être muni d'une structure d'EV.

— Trouver un opérateur $\Delta : E \to E$ tel que :

$$\forall \phi, ([\phi]_{f,g})' = [\Delta\phi]_{f,g}$$

— En écrivant Δ comme somme de deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent et en utilisant l'indentité de Newton sur l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$, montrer l'identité de Leibniz.

14.8 Un peu de dénombrement

Soit E un EV de dimension n sur le corps $\mathbb{F}_p$ et $r \leq n$.

— Combien y a-t-il de familles libres (ordonnées) de taille r sur E ?

— Combien y a-t-il de sous-espaces de dimension r dans E

14.9 Pour ceux qui aiment l'algèbre

Montrer que le cardinal de tout corps fini est une puissance d'un entier premier.

14.10 Petits exos faciles

— Montrer que l'ensemble des suites de périodes T est un EV. Quelle est sa dimension ?
— Soient $x_1 < \cdots < x_n$. Quelle est la dimension de l'espace des fonctions continues sur $[x_1, x_n]$ affines sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$?
— Montrer que $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, u = 0$
— Montrer que $|\,\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$
— Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(f \circ g) \leq \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(g)$ $(f, g \in \mathcal{L}(E))$. Cas d'égalité ? $(\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g))$

14.11 Contraintes indépendantes

Soit E e.v. de dimension n et $\phi_1, \cdots, \phi_p$ des formes linéaires indépendantes. Montrer que $\dim \bigcap_i \mathrm{Ker}\, \phi_i = n - p$.

Indices :
— Montrer que si H est un ev strict de $\mathbb{R}^p$, alors il existe $(a_i)_i$ telle que :

$$\forall x \in H, \sum_i a_i x_i = 0$$

— Etudier l'application $x \mapsto (\phi_1(x), \cdots, \phi_2(x))$

14.12 Décomposition de l'unité

Soit E un espace vectoriel, (f_i) une famille finie d'endomorphismes. On suppose que :
— $\sum rg(f_i) \leq n$
— $\sum f_i = Id$
Montrer que les f_i sont des projecteurs.
Solution : Comme $\sum f_i = Id$, on a $\bigoplus Im(f_i) = E$. (Vérifier les intersections nulles)
Indice : Montrer que $f_i f_j = 0$ si $i \neq j$.

14.13 Division polynomiale et projecteurs

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, et $A \in E$. Montrer que l'application qui à un polynome associe le reste de la division euclidienne par A est un projecteur. Déteriner son image et son noyau.

14.14 Corps et sur-corps