Class Notes for BRICS Minicourse - Fall 2003

SEPARATION LOGIC

6. Trees and Dags

John C. Reynolds
Department of Computer Science
Carnegie Mellon University
and
BRICS
Aarhus University

Revised December 3, 2003

©2003 John C. Reynolds

S-expressions (a la LISP)

$\tau \in$ S-exps iff

$$\tau \in \text{Atoms}$$

$$\text{or } \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \text{ where } \tau_1, \tau_2 \in \text{S-exps.}$$

Representing S-expressions by Trees

For $\tau \in$ S-exps, we define the assertion

$$\mathsf{tree}\, \tau\, (i)$$

by structural induction:

$$\mathsf{tree}\, a\, (i) \text{ iff } \mathbf{emp} \wedge i = a$$

$$\mathsf{tree}\, (\tau_1 \cdot \tau_2)\, (i) \text{ iff}$$
$$\exists i_1, i_2.\ \ i \mapsto i_1, i_2\ *\ \mathsf{tree}\, \tau_1\, (i_1)\ *\ \mathsf{tree}\, \tau_2\, (i_2)$$

Representing S-expressions by Dags

For $\tau \in$ S-exps, we define

$$\mathsf{dag}\, \tau\, (i)$$

by:

$$\mathsf{dag}\, a\, (i) \text{ iff } i = a$$

$$\mathsf{dag}\, (\tau_1 \cdot \tau_2)\, (i) \text{ iff}$$
$$\exists i_1, i_2.\ \ i \mapsto i_1, i_2\ *\ (\mathsf{dag}\, \tau_1\, (i_1) \wedge \mathsf{dag}\, \tau_2\, (i_2))$$

Intuitionistic Assertions

An assertion p is *intuitionistic* iff, for all stores s and heaps h and h':

$$h \subseteq h' \text{ and } s, h \vDash p \text{ implies } s, h' \vDash p.$$

An assertion p is intuitionistic iff

$$p \ * \ \mathbf{true} \Rightarrow p.$$

(The opposite implication always holds.)

The assertion $\mathsf{dag}\ \tau\ (i)$ is intuitionistic. The proof is by induction on the structure of τ. If τ is an atom a,

$$\begin{aligned} &\mathsf{dag}\ a\ (i) \ * \ \mathbf{true} \\ &\quad \Rightarrow i = a \ * \ \mathbf{true} \\ &\quad \Rightarrow i = a \\ &\quad \Rightarrow \mathsf{dag}\ a\ (i). \end{aligned}$$

since $i = a$ is pure. Otherwise, $\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2)$, and

$$\begin{aligned} &\mathsf{dag}\ (\tau_1 \cdot \tau_2)\ (i) \ * \ \mathbf{true} \\ &\quad \Rightarrow \exists i_1, i_2.\ \ i \mapsto i_1, i_2 \ * \ (\mathsf{dag}\ \tau_1\ (i_1) \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (i_2)) \ * \ \mathbf{true} \\ &\quad \Rightarrow \exists i_1, i_2.\ \ i \mapsto i_1, i_2 \ * \\ &\qquad ((\mathsf{dag}\ \tau_1\ (i_1) \ * \ \mathbf{true}) \wedge (\mathsf{dag}\ \tau_2\ (i_2) \ * \ \mathbf{true})) \\ &\quad \Rightarrow \exists i_1, i_2.\ \ i \mapsto i_1, i_2 \ * \ (\mathsf{dag}\ \tau_1\ (i_1) \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (i_2)) \\ &\quad \Rightarrow \mathsf{dag}\ (\tau_1 \cdot \tau_2)\ (i), \end{aligned}$$

by the induction hypothesis for τ_1 and τ_2.

Copying Trees

We assume that the recursive procedure copytree satisfies

$$\{\mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{i})\}\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j})\ \{\mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{i})\ *\ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}.$$

Then

$\{\mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{i})\}$
if $\mathsf{isatom}(\mathsf{i})$ **then**
  $\{\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \mathbf{emp} \wedge \mathsf{i} = \tau\}$
  $\{\mathsf{isatom}(\tau) \wedge ((\mathbf{emp} \wedge \mathsf{i} = \tau)\ *\ (\mathbf{emp} \wedge \mathsf{i} = \tau))\}$
  $\mathsf{j} := \mathsf{i}$
  $\{\mathsf{isatom}(\tau) \wedge ((\mathbf{emp} \wedge \mathsf{i} = \tau)\ *\ (\mathbf{emp} \wedge \mathsf{j} = \tau))\}$
else
  $\{\exists\tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{tree}\,(\tau_1 \cdot \tau_2)(\mathsf{i})\}$
  newvar $\mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2, \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2$ **in**
    $\big(\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\ ;$
    $\{\exists\tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *$
      $\mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2))\}$
    $\mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1; \mathsf{j}_1)\ ;$
    $\{\exists\tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *$
      $\mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1))\}$
    $\vdots$

Copying Trees (continued)

$$
\begin{array}{l}
\quad\vdots \\
\quad\{\exists\tau_1,\tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *\\
\qquad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1))\} \\
\quad \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_2;\mathsf{j}_2)\ ; \\
\quad\{\exists\tau_1,\tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\\
\qquad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{j}_2))\} \\
\quad \mathsf{j} := \mathbf{cons}(\mathsf{j}_1,\mathsf{j}_2) \\
\quad\{\exists\tau_1,\tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\\
\qquad \mathsf{j} \mapsto \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{j}_2))\} \\
\quad\{\exists\tau_1,\tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{tree}\,(\tau_1{\cdot}\tau_2)\,(\mathsf{i})\ *\ \mathsf{tree}\,(\tau_1{\cdot}\tau_2)\,(\mathsf{j}))\}\Big) \\
\{\mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{i})\ *\ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}.
\end{array}
$$

so that we may define

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j}) = \\
\quad \mathbf{if}\ \mathsf{isatom}(\mathsf{i})\ \mathbf{then}\ \mathsf{j} := \mathsf{i}\ \mathbf{else} \\
\qquad \mathbf{newvar}\ \mathsf{i}_1,\mathsf{i}_2,\mathsf{j}_1,\mathsf{j}_2\ \mathbf{in} \\
\qquad\quad \Big(\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\ ; \\
\qquad\quad \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ ;\ \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_2;\mathsf{j}_2)\ ;\ \mathsf{j} := \mathbf{cons}(\mathsf{j}_1,\mathsf{j}_2)\Big)
\end{array}
$$

Proof of the First Recursive Call

$$\frac{\{\mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{i})\}\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j})\ \{\mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{i})\ *\ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}}{\dfrac{\{\mathsf{tree}\,\tau_1(\mathsf{i}_1)\}\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ \{\mathsf{tree}\,\tau_1(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1(\mathsf{j}_1)\}}{\begin{array}{l}\{(\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2)\ * \\ \quad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\} \\ \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ ; \\ \{(\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2)\ * \\ \quad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1)\}\end{array}}}{\dfrac{\begin{array}{l}\{\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ * \\ \quad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2))\} \\ \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ ; \\ \{\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ * \\ \quad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1))\}\end{array}}{\begin{array}{l}\{\exists\tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ * \\ \quad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2))\} \\ \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ ; \\ \{\exists\tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ * \\ \quad \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1))\},\end{array}}}}$$

using the substitution rule, the frame rule, the rule of consequence (with the axiom that $(p \wedge q)\ *\ r \Leftrightarrow p \wedge (q\ *\ r)$ when p is pure), and the existential rule.

A Problem

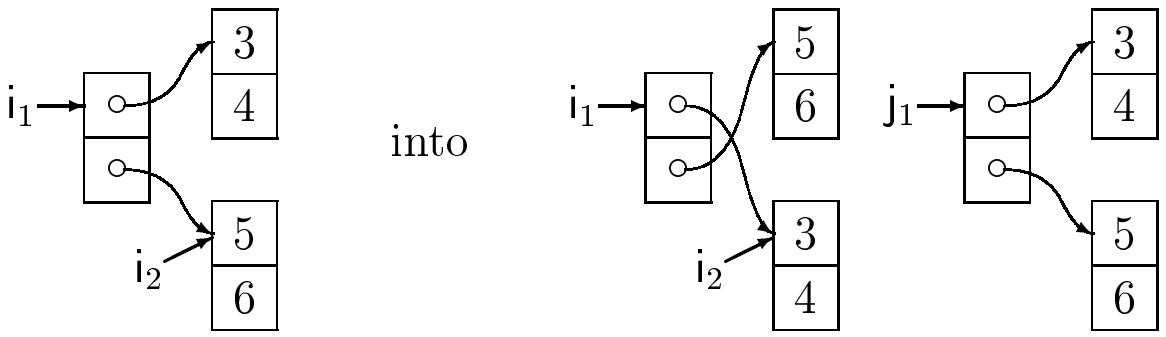
Suppose we wish to prove that

$$\{\mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\}\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j})\ \{\mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\ *\ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}$$

Then, we must use this specification as a hypothesis in proving that the recursive calls in the procedure body satisfy:

$$\begin{array}{l}\{\mathsf{dag}\,\tau_1(\mathsf{i}_1) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2(\mathsf{i}_2)\}\\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\\ \{(\mathsf{dag}\,\tau_1(\mathsf{i}_1) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2(\mathsf{i}_2))\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1(\mathsf{j}_1)\}\\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i}_2;\mathsf{j}_2)\\ \{(\mathsf{dag}\,\tau_1(\mathsf{i}_1) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2(\mathsf{i}_2))\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1(\mathsf{j}_1)\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_2(\mathsf{j}_2)\}\end{array}$$

But the hypothesis is not strong enough to imply this. For example, suppose $\tau_1 = ((3 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 6))$ and $\tau_2 = (5 \cdot 6)$. Then $\mathsf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)$ might change the state from



where $\mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)$ is false.

Possible Solutions

1. Introduce ghost variables denoting heaps, e.g.

$$\{\mathbf{this}(\mathsf{h}) \wedge \mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\}$$
$$\mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j})$$
$$\{\mathbf{this}(\mathsf{h}) \;*\; \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}$$

2. Introduce ghost variables denoting assertions, e.g.

$$\{\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\}$$
$$\mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j})$$
$$\{\mathsf{p} \;*\; \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}$$

3. Introduce passivity, i.e., the ability to assert that portions of the heap remain unchanged throughout the execution of a command.

We will explore the second approach.

Assertion Variables

$$\begin{aligned}
\langle \text{assert} \rangle &::= \langle \text{avar} \rangle \mid \cdots \\
\text{AStores}_A &= A \to (\text{Heaps} \to \mathbf{B}) \\
\text{AStates}_{AV} &= \text{AStores}_A \times \text{Stores}_V \times \text{Heaps} \\
[\![p \in \langle \text{assert} \rangle]\!]_{\text{assert}} &\in \bigcup_{A \overset{\text{fin}}{\supseteq} \text{AV}(p), V \overset{\text{fin}}{\supseteq} \text{FV}(p)} \text{AStates}_{AV} \to \mathbf{B},
\end{aligned}$$

where $\text{AV}(p)$ is the set of assertion variables occurring in p. Instead of $[\![p]\!]_{\text{assert}}(as, s, h)$, however, we write $as, s, h \vDash p$.

When a is an assertion variable,

$$as, s, h \vDash a \text{ iff } \ as\, a\, h.$$

The Substitution Law for Assertions, Revisited

Proposition 10 *Let δ abbreviate the substitution*

$$a_1 \to p_1, \ldots, a_m \to p_m, v_1 \to e_1, \ldots, v_n \to e_n,$$

let as and s be such that $\text{AV}(p_1) \cup \cdots \cup \text{AV}(p_m) \subseteq \text{dom}\, as$ and $\text{FV}(p_1) \cup \cdots \cup \text{FV}(p_m) \cup \text{FV}(e_1) \cup \cdots \cup \text{FV}(e_n) \subseteq \text{dom}\, s$, and let

$$\widehat{as} = [\, a_1 \colon \lambda h.\ (as, s, h \vDash p_1) \mid \ldots \mid a_m \colon \lambda h.\ (as, s, h \vDash p_m)\,]$$

$$\widehat{s} = [\, v_1 \colon [\![e_1]\!]_{\text{exp}} s \mid \ldots \mid v_n \colon [\![e_n]\!]_{\text{exp}} s\,].$$

If p is an assertion such that $\text{AV}(p) \subseteq \{a_1, \ldots, a_m\}$ and $\text{FV}(p) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$, then

$$as, s, h \vDash p/\delta \ \ \textit{iff} \ \ \widehat{as}, \widehat{s}, h \vDash p.$$

Specifications Revisited

Let $A = \mathrm{AV}(p) \cup \mathrm{AV}(q)$ and $V = \mathrm{FV}(p) \cup \mathrm{FV}(c) \cup \mathrm{FV}(q)$. Then

Partial correctness:

$\{p\}\ c\ \{q\}$ *holds* iff $\forall (as, s, h) \in \mathrm{AStates}_{AV}.\ as, s, h \vDash p$ implies

$\neg (s, h)\ [\![c]\!]_{\mathrm{comm}}\ \mathbf{abort}$

{i.e., c is safe at (s, h)}

and

$\Big(\forall (s', h') \in \mathrm{States}_V.\ (s, h)\ [\![c]\!]_{\mathrm{comm}}\ (s', h')$ implies $as, s', h' \vDash q\Big)$.

Total correctness:

$[\ p\ ]\ c\ [\ q\ ]$ *holds* iff $\forall (as, s, h) \in \mathrm{AStates}_{AV}.\ as, s, h \vDash p$ implies

$\neg (s, h)\ [\![c]\!]_{\mathrm{comm}}\ \mathbf{abort}$ and $\neg (s, h)\ [\![c]\!]_{\mathrm{comm}}\ \bot$

{i.e., c must terminate normally at (s, h)}

and

$\Big(\forall (s', h') \in \mathrm{States}_V.\ (s, h)\ [\![c]\!]_{\mathrm{comm}}\ (s', h')$ implies $as, s', h' \vDash q\Big)$.

The Substitution Rule (SUB) Revisited

$$\frac{\{p\}\ c\ \{q\}}{(\{p\}\ c\ \{q\})/a_1 \to p_1, \ldots, a_m \to p_m, v_1 \to e_1, \ldots, v_n \to e_n}$$

where $a_1, \ldots, a_m$ are the assertion variables occurring in p or q, and $v_1, \ldots, v_n$ are the variables occurring free in p, c, or q, and, if v_i is assigned by c, then e_i is a variable that does not occur free in any other e_j or in any p_j.

In $\{\mathsf{a}\}\ \mathsf{x} := \mathsf{y}\ \{\mathsf{a}\}$, for example, we can substitute $\mathsf{a} \to \mathsf{y} = \mathsf{z}, \mathsf{x} \to \mathsf{x}, \mathsf{y} \to \mathsf{y}$ to obtain

$$\{\mathsf{y} = \mathsf{z}\}\ \mathsf{x} := \mathsf{y}\ \{\mathsf{y} = \mathsf{z}\},$$

but we cannot substitute $\mathsf{a} \to \mathsf{x} = \mathsf{z}, \mathsf{x} \to \mathsf{x}, \mathsf{y} \to \mathsf{y}$ to obtain

$$\{\mathsf{x} = \mathsf{z}\}\ \mathsf{x} := \mathsf{y}\ \{\mathsf{x} = \mathsf{z}\}.$$

Proof: Assume $\{p\}\ c\ \{q\}$, and suppose $as, s, h \vDash p/\delta$, where δ is the substitution in the above rule. From the substitution law for assertions, $\widehat{as}, \widehat{s}, h \vDash p$.

Then since $\{p\}\ c\ \{q\}$, the definition of specification implies that c is safe at $(\widehat{s}, h)$ (and in the total-correctness case, c must terminate normally at $(\widehat{s}, h)$. Then the substitution law for commands (Proposition 4) implies that c/δ is safe at (s, h) (and in the total-correctness case, c/δ must terminate normally at (s, h)).

Now suppose $(s, h)\ [\![c/\delta]\!]_{\text{comm}}\ (s', h')$. By the substitution law for commands, $(\widehat{s}, h)\ [\![c]\!]_{\text{comm}}\ (\widehat{s'}, h')$. Then $\{p\}\ c\ \{q\}$ and $\widehat{as}, \widehat{s}, h \vDash p$ imply $\widehat{as}, \widehat{s'}, h' \vDash q$, and the substitution law for assertions gives $as, s', h' \vDash q/\delta$.

A Tree-Copying Procedure

We will prove that the procedure

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{copytree(i;j)} = \\
\quad \textbf{if } \mathsf{isatom(i)} \textbf{ then } \mathsf{j} := \mathsf{i} \textbf{ else} \\
\quad\quad \textbf{newvar } \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2, \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2 \textbf{ in} \\
\quad\quad\quad \big(\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}] \,;\, \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1] \,; \\
\quad\quad\quad \textbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1) \,;\, \textbf{copytree}(\mathsf{i}_2;\mathsf{j}_2) \,;\, \mathsf{j} := \textbf{cons}(\mathsf{j}_1,\mathsf{j}_2)\big)
\end{array}
$$

satisfies

$$\{\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\}\ \mathsf{copytree(i;j)}\ \{\mathsf{p} \ * \ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}.$$

We can take p to be $\mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})$, to obtain

$$\{\mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\}\ \mathsf{copytree(i;j)}\ \{\mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i}) \ * \ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\},$$

but this specification is too weak to serve as a recursion hypothesis.

The Proof

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\} \\
\textbf{if } \mathsf{isatom(i)} \textbf{ then} \\
\quad \{\mathsf{p} \wedge \mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{i}\} \\
\quad \{\mathsf{p} \ * \ (\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \textbf{emp})\} \\
\quad \mathsf{j} := \mathsf{i} \\
\quad \{\mathsf{p} \ * \ (\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{j} \wedge \textbf{emp})\} \\
\textbf{else} \\
\quad \vdots
\end{array}
$$

Proof of copytree (continued)

$$
\begin{array}{l}
\vdots \\
\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ (\tau_1 \cdot \tau_2)(\mathsf{i})\} \\
\mathbf{newvar}\ \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2, \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2\ \mathbf{in} \\
\quad \Big(\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\ ; \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad \mathsf{p} \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *\ (\mathsf{dag}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1) \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)))\} \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad \mathsf{p} \wedge (\mathbf{true}\ *\ (\mathsf{dag}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1) \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)))\} \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad \mathsf{p} \wedge ((\mathbf{true}\ *\ \mathsf{dag}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1)) \wedge (\mathbf{true}\ *\ \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)))\} \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2) \wedge \mathsf{dag}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1)\} \\
\quad \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1; \mathsf{j}_1)\ ; \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ (\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2))\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1)\} \\
\quad \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_2; \mathsf{j}_2)\ ; \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ (\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p})\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1)\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{j}_2)\} \\
\quad \mathsf{j} := \mathbf{cons}(\mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2) \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ (\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p})\ * \\
\qquad \mathsf{j} \mapsto \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1)\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{j}_2)\} \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \ (\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p})\ *\ \mathsf{tree}\ (\tau_1 \cdot \tau_2)\ (\mathsf{j})\}\Big) \\
\{\mathsf{p}\ *\ \mathsf{tree}\ \tau(\mathsf{j})\}
\end{array}
$$

Proof of the First Recursive Call

Using the substitution rule and the existential rule:

$$\dfrac{\dfrac{\{\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau(\mathsf{i})\}\ \mathsf{copytree}(\mathsf{i};\mathsf{j})\ \{\mathsf{p}\ *\ \mathsf{tree}\,\tau(\mathsf{j})\}}{\begin{array}{l}\{(\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\} \\ \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ ; \\ \{(\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2))\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1)\}\end{array}}}{\begin{array}{l}\{\exists\tau_1,\tau_2.\ \ (\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1)\} \\ \mathbf{copytree}(\mathsf{i}_1;\mathsf{j}_1)\ ; \\ \{\exists\tau_1,\tau_2.\ \ (\tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2))\ *\ \mathsf{tree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}_1)\}.\end{array}}$$

Substitution of an S-expression for an Atom

$$
\begin{aligned}
a/a \to \tau' &= \tau' \\
b/a \to \tau' &= b \qquad \text{when } b \in \text{Atoms} - \{a\} \\
(\tau_1 \cdot \tau_2)/a \to \tau' &= ((\tau_1/a \to \tau') \cdot (\tau_2/a \to \tau'))
\end{aligned}
$$

Substitution by Copying

$\mathsf{subst1}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}) =$

if $\mathsf{isatom}(\mathsf{i})$ **then if** $\mathsf{i} = \mathsf{a}$ **then** $\mathsf{copytree}(\mathsf{j}\,;\,\mathsf{i})$ **else skip**

else newvar $\mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2$ **in** $(\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\,;\,\mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\,;$

$\mathsf{subst1}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}_1)\,;\,\mathsf{subst1}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}_2)\,;\,[\mathsf{i}] := \mathsf{i}_1\,;\,[\mathsf{i}+1] := \mathsf{i}_2)$

satisfies

$\{\mathsf{tree}\,\tau\,(\mathsf{i}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}$

$\mathsf{subst1}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\,;\,\mathsf{i})$

$\{\mathsf{tree}\,(\tau/\mathsf{a} \to \tau')\,(\mathsf{i}) \;*\; \mathsf{p}\}$

Substitution by Copying (continued)

since

$\{\mathsf{tree}\,\tau\,(\mathsf{i}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}$
if $\mathsf{isatom}(\mathsf{i})$ **then**
  $\{(\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \mathbf{emp}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}$
  if $\mathsf{i} = \mathsf{a}$ **then**
    $\{(\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{a} \wedge \mathbf{emp}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}$
    $\{((\tau/\mathsf{a} \to \tau') = \tau' \wedge \mathbf{emp}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}$
    $\mathsf{copytree}(\mathsf{j}\,;\,\mathsf{i})$
    $\{((\tau/\mathsf{a} \to \tau') = \tau' \wedge \mathbf{emp}) \;*\; \mathsf{tree}\,\tau'\,(\mathsf{i}) \;*\; \mathsf{p}\}$
  else
    $\{(\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau \neq \mathsf{a} \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \mathbf{emp}) \;*\; \mathsf{p}\}$
    $\{((\tau/\mathsf{a} \to \tau') = \tau \wedge \mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \mathbf{emp}) \;*\; \mathsf{p}\}$
    skip
    $\vdots$

Substitution by Copying (continued)

$$
\begin{array}{l}
\quad \vdots \\
\textbf{else newvar } \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2 \textbf{ in } \Big(\\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ * \\
\qquad \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\} \\
\quad \mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\ ; \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ * \\
\qquad \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1)\ *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j}) \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\} \\
\quad \mathsf{subst1}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\ ;\ \mathsf{i}_1)\ ; \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ * \\
\qquad \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1)\ *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\} \\
\quad \mathsf{subst1}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\ ;\ \mathsf{i}_2)\ ; \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ * \\
\qquad \mathsf{tree}\ (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{p})\} \\
\quad [\mathsf{i}] := \mathsf{i}_1\ ;\ [\mathsf{i}+1] := \mathsf{i}_2 \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ * \\
\qquad \mathsf{tree}\ (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{p})\} \\
\quad \{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{tree}\ ((\tau_1/\mathsf{a} \to \tau') \cdot (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau'))\ (\mathsf{i})\ *\ \mathsf{p})\}\Big) \\
\{\mathsf{tree}\ (\tau/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i})\ *\ \mathsf{p}\}
\end{array}
$$

Substitution without Copying

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{subst2}(\mathsf{a},\mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}) = \\
\textbf{if } \mathsf{isatom}(\mathsf{i}) \textbf{ then if } \mathsf{i} = \mathsf{a} \textbf{ then } \mathsf{i} := \mathsf{j} \textbf{ else skip} \\
\textbf{else newvar } \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2 \textbf{ in } (\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\,;\, \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\,; \\
\quad \mathsf{subst2}(\mathsf{a},\mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}_1)\,;\,\mathsf{subst2}(\mathsf{a},\mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}_2)\,;\,[\mathsf{i}] := \mathsf{i}_1\,;\,[\mathsf{i}+1] := \mathsf{i}_2)
\end{array}
$$

satisfies

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{tree}\,\tau\,(\mathsf{i}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\} \\
\mathsf{subst2}(\mathsf{a},\mathsf{j}\,;\,\mathsf{i}) \\
\{\mathsf{dag}\,(\tau/\mathsf{a} \to \tau')\,(\mathsf{i}) \wedge (\mathsf{p} \;*\; \textbf{true})\}
\end{array}
$$

since

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{tree}\,\tau\,(\mathsf{i}) \;*\; (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\} \\
\textbf{if } \mathsf{isatom}(\mathsf{i}) \textbf{ then} \\
\quad \{\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j})\} \\
\quad \textbf{if } \mathsf{i} = \mathsf{a} \textbf{ then} \\
\quad\quad \{\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{a} \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j})\} \\
\quad\quad \{(\tau/\mathsf{a} \to \tau') = \tau' \wedge \mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j})\} \\
\quad\quad \mathsf{i} := \mathsf{j} \\
\quad \textbf{else} \\
\quad\quad \{\mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau \neq \mathsf{a} \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \mathsf{p}\} \\
\quad\quad \{(\tau/\mathsf{a} \to \tau') = \tau \wedge \mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = \mathsf{i} \wedge \mathsf{p}\} \\
\quad\quad \textbf{skip} \\
\quad \{\mathsf{dag}\,(\tau/\mathsf{a} \to \tau')\,(\mathsf{i}) \wedge \mathsf{p}\} \\
\quad\quad \vdots
\end{array}
$$

$\vdots$

else newvar $\mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2$ **in** $\Big($

$\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2\ *$
$\quad \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1)\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\}$

$\mathsf{i}_1 := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{i}_2 := [\mathsf{i}+1]\ ;$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ *$
$\quad \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ \mathsf{tree}\ \tau_1\ (\mathsf{i}_1)\ *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j}) \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\}$

$\mathsf{subst2}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\ ;\ \mathsf{i}_1)\ ;$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ *$
$\quad \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ (\mathsf{dag}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1) \wedge ((\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j}))\ *\ \mathbf{true})))\}$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ *$
$\quad \mathsf{tree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2)\ *\ (\mathsf{dag}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1) \wedge (\mathsf{p}\ *\ \mathbf{true}) \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\}$

$\mathsf{subst2}(\mathsf{a}, \mathsf{j}\ ;\ \mathsf{i}_2)\ ;$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ *$
$\quad (\mathsf{dag}\ (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_2) \wedge$
$\qquad ((\mathsf{dag}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1) \wedge (\mathsf{p}\ *\ \mathbf{true}))\ *\ \mathbf{true})))\}$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ *$
$\quad (\mathsf{dag}\ (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_2) \wedge \mathsf{dag}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1) \wedge (\mathsf{p}\ *\ \mathbf{true})))\}$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, -\ *$
$\quad (\mathsf{dag}\ (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_2) \wedge \mathsf{dag}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1))) \wedge (\mathsf{p}\ *\ \mathbf{true})\}$

$[\mathsf{i}] := \mathsf{i}_1\ ;\ [\mathsf{i}+1] := \mathsf{i}_2$

$\{\exists \tau_1, \tau_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \mathsf{dag}\ ((\tau_1/\mathsf{a} \to \tau') \cdot (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau'))\ (\mathsf{i}) \wedge$
$\qquad (\mathsf{p}\ *\ \mathbf{true})\}\Big)$

$\{\mathsf{dag}\ (\tau/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}) \wedge (\mathsf{p}\ *\ \mathbf{true})\}$

Representing S-expressions by Back-Linked Trees

For $\tau \in$ S-exps, we define

$$\mathsf{bktree}\,\tau\,(i,b,t)$$

by structural induction:

$$\mathsf{bktree}\,a\,(i,b,t) \text{ iff } i \mapsto b,t,a,-$$

$\mathsf{bktree}\,(\tau_1 \cdot \tau_2)\,(i,b,t)$ iff

$$\exists i_1,i_2.\ \ i \mapsto b,t,i_1,i_2 \ *\ \mathsf{bktree}\,\tau_1\,(i_1,i,0) \ *\ \mathsf{bktree}\,\tau_2\,(i_2,i,1).$$

Then

$\mathsf{copybktree}(\mathsf{i},\mathsf{j}) =$

$\quad$ **if** $\mathsf{isatom}(\mathsf{i})$ **then** $[\mathsf{j}+2] := \mathsf{i}$

$\quad$ **else newvar** i',j' **in**

$\quad\quad \Big(\mathsf{i}' := [\mathsf{i}]\ ;\ \mathsf{j}' := \mathbf{cons}(\mathsf{j},0,0,0)\ ;\ \mathsf{copybktree}(\mathsf{i}',\mathsf{j}')\ ;\ [\mathsf{j}+2] := \mathsf{j}'\ ;$

$\quad\quad \mathsf{i}' := [\mathsf{i}+1]\ ;\ \mathsf{j}' := \mathbf{cons}(\mathsf{j},1,0,0)\ ;\ \mathsf{copybktree}(\mathsf{i}',\mathsf{j}')\ ;\ [\mathsf{j}+3] := \mathsf{j}'\Big)$

satisfies

$$\{(\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau\,(\mathsf{i}))\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{t},-,-\}$$
$$\mathsf{copybktree}(\mathsf{i},\mathsf{j})$$
$$\{\mathsf{p}\ *\ \mathsf{bktree}\,\tau\,(\mathsf{j},\mathsf{b},\mathsf{t})\}$$

since

$\{(\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau\,(\mathsf{i})) \;*\; \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -\}$

if $\mathsf{isatom}(\mathsf{i})$ **then**

$\{(\mathsf{p} \wedge \mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = i) \;*\; \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -\}$

$[\mathsf{j} + 2] := \mathsf{i}$

$\{(\mathsf{p} \wedge \mathsf{isatom}(\tau) \wedge \tau = i) \;*\; \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{i}, -\}$

else newvar i', j' **in**

$\Big(\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge$

$\quad \Big(\Big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}_1, \mathsf{i}_2 \;*\; (\mathsf{dag}\,\tau_1\,(\mathsf{i}_1) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)))\Big) * \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -\Big)\}$

$\mathsf{i}' := [\mathsf{i}]\ ;$

$\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge$

$\quad \Big(\Big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}', \mathsf{i}_2 \;*\; (\mathsf{dag}\,\tau_1\,(\mathsf{i}') \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)))\Big) * \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -\Big)\}$

$\mathsf{j}' := \mathbf{cons}(\mathsf{j}, 0, 0, 0)\ ;$

$\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge$

$\quad \Big(\Big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{i}', \mathsf{i}_2 \;*\; (\mathsf{dag}\,\tau_1\,(\mathsf{i}') \wedge \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)))\Big) * \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -$

$\qquad * \mathsf{j}' \mapsto \mathsf{j}, 0, -, -\Big)\}$

$\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge$

$\quad \Big(\Big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, \mathsf{i}_2 \;*\; \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2)) \wedge \mathsf{dag}\,\tau_1\,(\mathsf{i}')\Big) * \mathsf{j}' \mapsto \mathsf{j}, 0, -, -$

$\qquad * \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -\Big)\}$

$\mathsf{copybktree}(\mathsf{i}', \mathsf{j}')\ ;$

$\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge$

$\quad \Big(\Big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, \mathsf{i}_2 \;*\; \mathsf{dag}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2))\Big) * \mathsf{bktree}\,\tau_1\,(\mathsf{j}', \mathsf{j}, 0) \;*\; \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, -, -\Big)\}$

$[\mathsf{j} + 2] := \mathsf{j}'\ ;$

$\quad \vdots$

$$
\begin{array}{l}
\quad \vdots \\
\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{j}_1, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\quad \Big(\big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, \mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2))\big) *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1, \mathsf{j}, 0)\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{j}_1, -\Big)\} \\
\mathsf{i}' := [\mathsf{i} + 1]\ ; \\
\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{j}_1.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\quad \Big(\big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, \mathsf{i}'\ *\ \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}'))\big) *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1, \mathsf{j}, 0)\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{j}_1, -\Big)\} \\
\mathsf{j}' := \mathbf{cons}(\mathsf{j}, 1, 0, 0)\ ; \\
\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{j}_1.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\quad \Big(\big(p \wedge (\mathsf{i} \mapsto -, \mathsf{i}'\ *\ \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}'))\big) *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1, \mathsf{j}, 0)\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{j}_1, - \\
\qquad *\ \mathsf{j}' \mapsto \mathsf{j}, 1, -, -\Big)\} \\
\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{j}_1.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\quad \Big(\big(p \wedge \mathsf{dag}\ \tau_2\ (\mathsf{i}')\big) *\ \mathsf{j}' \mapsto \mathsf{j}, 1, -, - \\
\qquad *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1, \mathsf{j}, 0)\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{j}_1, -\Big)\} \\
\mathsf{copybktree}(\mathsf{i}', \mathsf{j}')\ ; \\
\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{j}_1.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\quad (p\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_2\ (\mathsf{j}', \mathsf{j}, 1)\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1, \mathsf{j}, 0)\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{j}_1, -)\} \\
[\mathsf{j} + 3] := \mathsf{j}' \\
\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\quad (p\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_2\ (\mathsf{j}_2, \mathsf{j}, 1)\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{j}_1, \mathsf{j}, 0)\ *\ \mathsf{j} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2)\}\Big) \\
\{\mathsf{p}\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau\ (\mathsf{j}, \mathsf{b}, \mathsf{t})\}.
\end{array}
$$

Substitution in Back-Linked Trees

We first note that

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{bktree}\,\tau\,(\mathsf{i},\mathsf{b},\mathsf{t}) \Rightarrow \\
\quad \exists \mathsf{k}.\ \mathsf{i} \hookrightarrow \mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},- \\
\qquad \wedge\,(\mathsf{isatom}(\mathsf{k}) \Rightarrow \tau = \mathsf{k} \wedge \mathsf{i} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-) \\
\qquad \wedge\,(\neg\,\mathsf{isatom}(\mathsf{k}) \Rightarrow \exists \tau_1,\tau_2,\mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad\quad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},\mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{bktree}\,\tau_1\,(\mathsf{k},\mathsf{i},0)\ *\ \mathsf{bktree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2,\mathsf{i},1)).
\end{array}
$$

Then

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{subst3}(\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{i}) = \\
\quad \mathbf{newvar}\ \mathsf{k}\ \mathbf{in}\ \Big(\mathsf{k} := [\mathsf{i}+2]\ ; \\
\qquad \mathbf{if}\ \mathsf{isatom}(\mathsf{k})\ \mathbf{then} \\
\qquad\quad \mathbf{if}\ \mathsf{k} = \mathsf{a}\ \mathbf{then}\ \mathsf{copybktree}(\mathsf{j},\mathsf{i})\ \mathbf{else\ skip} \\
\qquad \mathbf{else}\ (\mathsf{subst3}(\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{k})\ ;\ \mathsf{k} := [\mathsf{i}+3]\ ;\ \mathsf{subst3}(\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{k}))\Big)
\end{array}
$$

satisfies

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{bktree}\,\tau\,(\mathsf{i},\mathsf{b},\mathsf{t})\ *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\} \\
\mathsf{subst3}(\mathsf{a},\mathsf{j},\mathsf{i}) \\
\{\mathsf{bktree}\,(\tau/\mathsf{a} \to \tau')\,(\mathsf{i},\mathsf{b},\mathsf{t})\ *\ \mathsf{p}\}
\end{array}
$$

since

$$
\begin{array}{l}
\{\mathsf{bktree}\,\tau\,(\mathsf{i},\mathsf{b},\mathsf{t})\ *\ (\mathsf{p}\wedge\mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}\\
\mathbf{newvar}\ \mathsf{k}\ \mathbf{in}\ \big(\mathsf{k}:=[\mathsf{i}+2]\ ;\\
\quad\{(\mathsf{i}\hookrightarrow\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-\wedge(\mathsf{isatom}(\mathsf{k})\Rightarrow\tau=\mathsf{k}\wedge\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-)\\
\qquad\wedge(\neg\,\mathsf{isatom}(\mathsf{k})\Rightarrow\exists\tau_1,\tau_2,\mathsf{i}_2.\ \tau=(\tau_1\cdot\tau_2)\wedge\\
\qquad\quad(\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},\mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{bktree}\,\tau_1\,(\mathsf{k},\mathsf{i},0)\ *\ \mathsf{bktree}\,\tau_2\,(\mathsf{i}_2,\mathsf{i},1))))\\
\quad *\ (\mathsf{p}\wedge\mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}\\
\quad\mathbf{if}\ \mathsf{isatom}(\mathsf{k})\ \mathbf{then}\\
\qquad\{(\mathsf{isatom}(\tau)\wedge\tau=\mathsf{k}\wedge\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-)\ *\ (\mathsf{p}\wedge\mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}\\
\qquad\mathbf{if}\ \mathsf{k}=\mathsf{a}\ \mathbf{then}\\
\qquad\quad\{(\mathsf{isatom}(\tau)\wedge\tau=\mathsf{a}\wedge\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-)\ *\ (\mathsf{p}\wedge\mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j}))\}\\
\qquad\quad\{(\tau/\mathsf{a}\to\tau')=\tau'\wedge(\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},-,-\ *\ (\mathsf{p}\wedge\mathsf{dag}\,\tau'\,(\mathsf{j})))\}\\
\qquad\quad\mathsf{copybktree}(\mathsf{j},\mathsf{i})\\
\qquad\quad\{(\tau/\mathsf{a}\to\tau')=\tau'\wedge(\mathsf{bktree}\,\tau'\,(\mathsf{i},\mathsf{b},\mathsf{t})\ *\ \mathsf{p})\}\\
\qquad\mathbf{else}\\
\qquad\quad\{(\mathsf{isatom}(\tau)\wedge\tau\neq\mathsf{a}\wedge\tau=\mathsf{k}\wedge\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-)\ *\ \mathsf{p}\}\\
\qquad\quad\{((\tau/\mathsf{a}\to\tau')=\tau\wedge\mathsf{isatom}(\tau)\wedge\tau=\mathsf{k}\wedge\mathsf{i}\mapsto\mathsf{b},\mathsf{t},\mathsf{k},-)\ *\ \mathsf{p}\}\\
\qquad\quad\mathbf{skip}\\
\qquad\vdots
\end{array}
$$

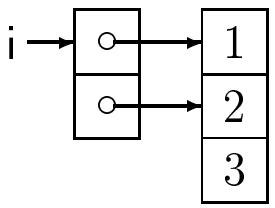
$$
\begin{array}{l}
\quad \vdots \\
\quad \textbf{else} \\
\quad \Big(\{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{k}, \mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_1\ (\mathsf{k}, \mathsf{i}, 0)\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2, \mathsf{i}, 1) \\
\qquad *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j}) \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\} \\
\qquad \mathsf{subst3}(\mathsf{a}, \mathsf{j}, \mathsf{k})\ ; \\
\qquad \{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_2.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{k}, \mathsf{i}_2\ *\ \mathsf{bktree}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{k}, \mathsf{i}, 0)\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_2\ (\mathsf{i}_2, \mathsf{i}, 1) \\
\qquad *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\} \\
\qquad \mathsf{k} := [\mathsf{i} + 3]\ ; \\
\qquad \{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_1.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{i}_1, \mathsf{k}\ *\ \mathsf{bktree}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1, \mathsf{i}, 0)\ *\ \mathsf{bktree}\ \tau_2\ (\mathsf{k}, \mathsf{i}, 1) \\
\qquad *\ (\mathsf{p} \wedge \mathsf{dag}\ \tau'\ (\mathsf{j})))\} \\
\qquad \mathsf{subst3}(\mathsf{a}, \mathsf{j}, \mathsf{k}) \\
\qquad \{\exists \tau_1, \tau_2, \mathsf{i}_1.\ \tau = (\tau_1 \cdot \tau_2) \wedge \\
\qquad (\mathsf{i} \mapsto \mathsf{b}, \mathsf{t}, \mathsf{i}_1, \mathsf{k}\ *\ \mathsf{bktree}\ (\tau_1/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}_1, \mathsf{i}, 0) \\
\qquad *\ \mathsf{bktree}\ (\tau_2/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{k}, \mathsf{i}, 1)\ *\ \mathsf{p})\}\Big)\Big) \\
\{\mathsf{bktree}\ (\tau/\mathsf{a} \to \tau')\ (\mathsf{i}, \mathsf{b}, \mathsf{t})\ *\ \mathsf{p}\}
\end{array}
$$

Skewed Sharing

Our definition of dag permits *skewed sharing*. For example,

$$\mathsf{dag}\,((1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3))\,(\mathsf{i})$$

holds when



This causes difficulties with algorithms for modifying or copying dags (while preserving structure).

A Possible Solution:

- We add to the state a mapping ϕ from the domain of the heap to natural numbers, called the field count.
- When $x := \mathbf{cons}(e_1, \ldots, e_n)$ sets x to the address a. the field count is extended so that

  $$\phi(a) = n \qquad \phi(a+1) = 0 \qquad \cdots \qquad \phi(a+n-1) = 0.$$

- We introduce $\overset{h}{\mapsto}$ such that $\phi, s, h \vDash e \overset{h}{\mapsto} e_1, \ldots, e_n$ iff

  $$s, h \vDash e \mapsto e_1, \ldots, e_n \text{ and } \phi([\![e]\!]_{\exp} s) = n \text{ and}$$
  $$\phi([\![e]\!]_{\exp} s + 1) = 0 \text{ and } \ldots \text{ and } \phi([\![e]\!]_{\exp} s + n - 1) = 0.$$

- Then

  $$e \overset{h}{\hookrightarrow} e_1, \ldots, e_m \wedge e' \overset{h}{\hookrightarrow} e'_1, \ldots, e'_n \wedge e \neq e' \Rightarrow$$
  $$e \overset{h}{\mapsto} e_1, \ldots, e_m \ * \ e' \overset{h}{\mapsto} e'_1, \ldots, e'_n \ * \ \mathbf{true}.$$