

Extinderi ale notiunii de P-graf relativ la grafuri neorientate

Florentina-Rodica NICULESCU

Universitatea din București, Facultatea de Matematică și Informatică, Departamentul de Informatică, rodicaniculescu@gmail.com

Radu-Ștefan NICULESCU

Siemens Medical Solutions, Malvern, PA, USA, stefan.niculescu@siemens.com

Rezumat:

In this paper we introduce undirected P_k -graphs and undirected Q_k -graphs, two generalizations of P-graphs. The main results of this research describe the minimum number of edges of such graphs. We also characterize the density of such graphs relative to the entire set of graphs. A similar density result is proved for matrix labyrinths which have the property that one can find an exit path from any given position.

Cuvinte cheie: Grafuri, Conexitate, P-Grafuri, Labirinturi

1. INTRODUCERE

Această lucrare extinde noțiunea de P-graf [4] relativ la grafuri neorientate. Generalizarea a fost realizată în două direcții. Astfel, au fost introduse noțiunile de P_k -graf neorientat și cea de Q_k -graf. La început se prezintă un rezultat ce caracterizează conexitatea P_k -grafurilor, apoi o inegalitate asupra gradelor vârfurilor unui astfel de graf, inegalitate care conduce la determinarea unei margini inferioare pentru numărul de muchii ale unui P_k -graf. Se demonstrează o propoziție ce face trecerea de la P_k -grafuri la P_{k+1} -grafuri, propoziție care permite determinarea unei margini superioare a numărului minim de muchii pe care îl are un P_k -graf cu număr fixat de vârfuri. Acest număr este determinat efectiv pentru două tipuri particulare de astfel de P_k -grafuri.

Pornind de la două rezultate din [2], care estimează numărul grafurilor de diametru egal cu doi și număr fixat de vârfuri și dau o relație de recurență pentru calculul numărului grafurilor conexe cu număr fixat de vârfuri, se obține o estimare a numărului de P_k -grafuri (și implicit de P-grafuri, care sunt privite ca tipuri particulare de P_k -grafuri) când numărul de vârfuri tinde la infinit.

Cea de-a doua generalizare a noțiunii de P-graf se referă la Q_k -grafuri. Se prezintă o încadrare a numărului minim de muchii pe care le poate avea un Q_k -graf cu număr fixat de vârfuri, precum și o teoremă de caracterizare a conexității acestor grafuri. Ultima teoremă referitoare la Q_k -grafuri dă o estimare a numărului acestora când numărul de vârfuri tinde la infinit.

Ca o completare la teoremele de estimare prezentate, sunt date câteva noțiuni despre labirinturile matriciale, se face asocierea acestor labirinturi cu grafuri neorientate și este prezentat un rezultat asupra numărului acelor labirinturi care au proprietatea că oricum am plasa o persoană în interior, ea poate ieși din labirint. Articolul se încheie cu un rezumat și sugestii pentru cercetări ulterioare.

2. P_k GRAFURI

Prima generalizare a notiunii de P-graf se referă la numărul de vârfuri care au un nod comun:

Definiție 1. Fie $G(V,E)$ un graf neorientat. Spunem că k -upletul de vârfuri distincte din $V(G)$ are proprietatea P_k dacă există un vârf y al grafului G , diferit de x_1, x_2, \dots, x_k , cu proprietatea ca y este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k . Spunem că G este un P_k -graf dacă oricum am alege x_1, x_2, \dots, x_k vârfuri distincte ale lui G , atunci k -upletul (x_1, x_2, \dots, x_k) are proprietatea P_k . În particular, pentru $k=2$, obținem definiția unui P-graf [4].

Observația 1. Pentru orice k și orice n numere naturale, unde $n \geq k+1$, există P_k -grafuri cu n vârfuri și există grafuri cu n vârfuri care nu sunt P_k -grafuri. Pentru a vedea acest fapt este suficient să considerăm graful complet K_n în primul caz și un graf cu n vârfuri și fără muchii în cel de-al doilea caz.

Definiție 2. Notăm cu $a_k(n)$ numărul minim de muchii ale unui P_k -graf. În particular, pentru $k=2$, numărul minim de muchii al unui P-graf este $a(n) = a_2(n)$.

Propoziție 1. Fie $G(V,E)$ un P_k -graf. Atunci G este $k-1$ vârf conex.

Demonstrație:

Fie G_1 graful obținut din G prin suprimarea a s vârfuri unde $s \leq k-2$. Fie x_1, x_2, \dots, x_s vârfurile șterse. Fie x și y două vârfuri ale lui G_1 alese arbitrar. Punem $x_{s+1} = x$ și $x_{s+2} = y$. Alegem x_{s+3}, \dots, x_k diferite două câte două și diferite de x_1, x_2, \dots, x_{s+2} . Deoarece G este P_k -graf, k -upletul (x_1, x_2, \dots, x_k) are proprietatea P_k , deci există un vârf z diferit de x_1, x_2, \dots, x_k cu proprietatea că z este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k . Deducem de aici că z este vârf pentru G_1 .

În concluzie între x și y în G_1 există un lanț format din muchiile xz și zy . Cum x și y sunt două vârfuri oarecare ale lui G_1 , rezultă G_1 graf conex, deci G este $k-1$ vârf conex. \square

Propoziția 2. Fie $G(V,E)$ un P_k -graf și x un vârf din $V(G)$. Atunci $d_G(x) \geq k$.

Demonstrație:

Presupunem prin absurd că $d_G(x) \geq k-1$. Fie x_1, x_2, \dots, x_s vârfurile adiacente cu x , unde $s = d_G(x)$. Punem $x_{s+1} = x$. Alegem x_{s+2}, \dots, x_k diferite două câte două și diferite de x_1, x_2, \dots, x_{s+1} . Deoarece G este P_k -graf, k -upletul (x_1, x_2, \dots, x_k) are proprietatea P_k , deci există un vârf y diferit de x_1, x_2, \dots, x_k , cu proprietatea că y este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k . Implicit rezultă y adiacent cu x , ceea ce reprezintă o contradicție, căci x este adiacent doar cu x_1, x_2, \dots, x_s . În concluzie, presupunerea făcută inițial este falsă, deci $d_G(x) \geq k$. \square

Corolar 1. Dacă $G(V,E)$ este un P_k -graf cu n vârfuri, atunci $|E(G)| \geq \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$.

Demonstrație:

Este cunoscută relația: $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|$.

Din Propoziția 2 rezultă $2|E(G)| \geq nk$, ceea ce implică $|E(G)| \geq \left\lceil \frac{nk}{2} \right\rceil$. \square

Propoziția 3.

a) Fie $G(V,E)$ un P_{k+1} -graf și x un vârf al său. Fie G_1 graficul obținut din G prin suprimarea vârfului x și a muchiilor incidente acestuia. Atunci G_1 este un P_k -graf.

b) Fie $G(V,E)$ un P_k -graf și G_1 graficul obținut din G prin adăugarea unui nou vârf x pe care îl unim prin muchii cu toate vârfurile lui G . Atunci G_1 este un P_{k+1} -graf.

Demonstrație:

a) Fie x_1, x_2, \dots, x_k vârfuri arbitrare ale lui G_1 . Punem $x_{k+1} = x$. Deoarece G este P_{k+1} -graf, există un vârf y diferit de cele $k+1$ și cu proprietatea că y este adiacent cu toate cele $k+1$ vârfuri. În particular y este diferit de x , deci $y \in V(G_1)$. Înseamnă că (x_1, x_2, \dots, x_k) are proprietatea P_k . Cum x_1, x_2, \dots, x_k sunt vârfuri ale lui G_1 arbitrar alese, deducem că G_1 este un P_k -graf.

b) Fie x_1, x_2, \dots, x_{k+1} vârfuri arbitrare ale lui G_1 . Deosebim două cazuri:

(i) $x \notin (x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$. În acest caz $(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ are proprietatea P_{k+1} deoarece x este adiacent cu toate cele $k+1$ vârfuri.

(ii) $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$. Putem presupune $x = x_{k+1}$. Deoarece G este P_k -graf, există un vârf y în G adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k . Atunci, din construcția lui G_1 , y este adiacent și cu x . Deci y este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_{k+1} și, în concluzie, $k+1$ -upletul $(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ are proprietatea P_{k+1} .

Din analiza cazurilor (i) și (ii) se deduce ca $(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ are proprietatea P_{k+1} , deci G_1 este un P_{k+1} -graf. \square

Teorema 1. Pentru k și n două numere naturale astfel încat $n \geq k+1$, are loc următoarea inegalitate: $a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1$.

Demonstrație:

Fie $G(V, E)$ un P_k -graf cu n vârfuri și $a_k(n)$ muchii. Fie G_1 graful obținut prin adăugarea unui nou vârf care se unește prin muchii cu toate vârfurile lui G . Conform propozitiei 3, avem $|E(G)| = a_k(n) + n$ și G_1 este un P_{k+1} -graf. Deoarece $a_{k+1}(n) \leq |E(G_1)|$, deducem

$$a_{k+1}(n) \leq a_k(n) + n \text{ pentru orice } k, n \text{ numere naturale cu } n \geq k+1.$$

Obținem astfel șirul de inegalități următor:

$$a_k(n) \leq a_{k-1}(n-1) + (n-1) \leq \dots \leq a_2(n-(k-2)) + (n-1) + \dots + (n-(k-2))$$

Deci

$$a_k(n) \leq (n-(k-2)) - 1 + \left\lceil \frac{n-(k-2)}{2} \right\rceil + n(k-2) + \frac{(k-2)(k-1)}{2} \text{ sau, mai}$$

concis,

$$a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1. \quad \square$$

Propozitia 4. Pentru a) $n = k+1$ sau b) $n = k+2$, în Teorema 1 avem chiar egalitate.

Demonstrație:

a) Fie x și y două vârfuri distincte ale unui P_k -graf G cu $n = k+1$ vârfuri. Atunci k -upletul $(x_1 = y, x_2, \dots, x_k)$ are proprietatea P_k , deci există un vârf z diferit de x_1, x_2, \dots, x_k , cu proprietatea că z este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k .

Deoarece $|V(G)| = k + 1$, singura posibilitate este $z = x$. Deducem x și y adiacente. Cum x și y au fost arbitrar alese, rezultă G izomorf cu graful complet K_n care are $|E(K_n)| = \frac{(k)(k+1)}{2} = \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1$ vârfuri. Pentru a deduce egalitatea am folosit $n = k + 1$.

b) Fie G un P_k -graf cu $n = k + 2$ vârfuri și $a_k(n)$ muchii. Din inegalitatea din Teorema 1 deducem

$$a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1 = \frac{k^2 + 3k}{2} = C_{k+2}^2 - 1.$$

Din ultima inegalitate rezultă că există x și y două vârfuri distincte ale lui G astfel încat $xy \notin E(G)$.

Considerăm z un vârf diferit de x și y . Vom arata că z este adiacent cu toate celelalte vârfuri ale lui G . Deoarece G este un P_k -graf, k -upletul $(x_1 = y, x_2, \dots, x_k)$ unde x și z nu apar în k -uplet, are proprietatea P_k , deci există un vârf u diferit de x_1, x_2, \dots, x_k cu proprietatea ca u este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k .

Deoarece $|V(G)| = k + 2$, singurele variante ar fi $u = x$ sau $u = z$.

Prima variantă nu este posibilă deoarece x și $y = x_1$ nu sunt adiacente.

Deci $u = z$, ceea ce implică z adiacent cu toate celelalte vârfuri, mai puțin cu x . Printr-un raționament analog se poate arăta ca z adiacent cu toate celelalte vârfuri, mai puțin cu y .

În concluzie, z este adiacent cu toate celelalte $k + 1$ vârfuri. Deoarece z a fost ales arbitrar, rezulta G izomorf cu un graf care se obține din K_n prin suprimarea unei muchii. Cum acest graf are chiar $C_{k+2}^2 - 1$ muchii, obținem egalitate în Teorema 1. \square

Corolar 2. Pentru $n = k + 2$ structura P_k - grafului minimal cu n vârfuri este unică. Rezultă din demonstrația Propoziției 4, punctul b).

Teorema 2. Pentru k și n două numere naturale, astfel încât $n \geq k + 1$, are loc următoarea inegalitate:

$$a_k(n) \geq \left\lceil \frac{(k+1)(n-1)}{2} \right\rceil.$$

Demonstrație:

Fie $G(V, E)$ un P_k -graf cu n vârfuri și $a_k(n)$ muchii iar x un vârf al său. Fie $d = d_G(x)$ și $A_x = \{x_1, \dots, x_d\}$ mulțimea vârfurilor adiacente cu x . Vom arăta

că x_1 este adiacent cu cel puțin $k-1$ vârfuri din mulțimea A_x . Fie s numărul de vârfuri din A_x adiacente cu x_1 . Putem presupune că x_1 este adiacent cu x_2, \dots, x_{s+1} .

Dacă $s < k-1$, atunci, deoarece G este un P_k -graf, k -upletul $(x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ (unde x_{s+2}, \dots, x_{k-1} sunt arbitrar alese (conform propoziției 2, $d \geq k$), astfel încât să fie distincte între ele și distincte de x_1, \dots, x_{s+1}) are proprietatea P_k . Astfel, există un vârf y adiacent cu $x, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Deoarece y este adiacent cu x , implică $y \in A_x$. Deoarece y este diferit de x_2, \dots, x_{s+1} și y este adiacent cu x_1 , ajungem la o contradicție.

În concluzie, presupunerea ca $s < k-1$ este falsă, deci x_1 este adiacent cu cel puțin $k-1$ vârfuri din mulțimea A_x .

Observația 2. În mod analog se poate arăta că oricare x_i din A_x este adiacent cu cel puțin $k-1$ vârfuri din A_x .

Observația 3. Orice vârf din $V(G) \setminus (A_x) \setminus \{x\}$ este adiacent cu cel puțin un vârf din A_x .

Pentru a demonstra acest fapt să considerăm $y \in V(G) \setminus (A_x) \setminus \{x\}$ și k -upletul (x_1, x_2, \dots, x_k) de vârfuri distincte din $V(G)$ cu $x = x_1$ și $y = x_2$. Deoarece G este P_k -graf, deducem că există un vârf z diferit de x_1, x_2, \dots, x_k , cu proprietatea că z este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k . Implicit z este adiacent și cu $x = x_1$, deci $z \in A_x$. Vârful y este adiacent cu z deoarece $y = x_2$.

În concluzie, orice vârf din $V(G) \setminus (A_x) \setminus \{x\}$ este adiacent cu cel puțin un vârf din A_x . Cu aceasta, observația este complet demonstrată.

În continuare vom folosi relația $\sum_{x \in V(G)} d_G(x) = 2 |E(G)|$.

Aplicând observațiile 2, 3 și propoziția 2, obținem:

$$2|E(G)| \geq 2d + (n-d+1) + k(n-d+1) + (k-1)d = (k-1)(n+1)$$

$2d$ apare în momentul când numărăm muchiile dintre x și A_x , $n-d+1$ apare când numărăm muchiile ce pleacă din A_x către $V(G) \setminus (A_x) \setminus \{x\}$ (conform observației 3), $k(n-d+1)$ apare din faptul că orice vârf din $V(G) \setminus (A_x) \setminus \{x\}$ are gradul cel puțin k (conform propoziției 2), iar $(k-1)d$ apare când numărăm muchiile care pleacă din A_x tot în A_x (conform observației 2). Din ultima inegalitate deducem:

$$a_k(n) \geq \left\lceil \frac{(k+1)(n-1)}{2} \right\rceil \quad \square$$

Din cele demonstrate mai sus obținem dubla inegalitate:

$$\left\lceil \frac{(k+1)(n-1)}{2} \right\rceil \leq a_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1.$$

Corolar 3.
$$a(n) = n - 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Demonstrație:

Sa consideram un graf “morisca” (A-graf sau B-graf definit in [4]) in care un varf (centru) este conectat cu celelalte varfuri iar acestea au fiecare gradul 2 (sunt conectate in perechi). In cazul cand n este par, doua palete ale “moristii” au o muchie comuna. Evident, un graf morisca este un P-graf si are $n - 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ muchii, ceea ce implica $a(n) \leq n - 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Conform teoremei anterioare, putem deduce următoarea inegalitate:

$$a(n) = a_2(n) \geq \left\lceil \frac{(2+1)(n-1)}{2} \right\rceil = n - 1 + \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = n - 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Am folosit următoarea egalitate evidentă: $\lceil x \rceil = \left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil$.

Din cele două inegalități deducem că $a(n) = n - 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. □

Astfel am realizat o metoda mai simplă de a afla $a(n)$ decat in [4], însă această metodă nu demonstrează și unicitatea configurației minimale, spre deosebire de rezultatul din articolul citat.

Definiția 3. Distanța dintre vârfurile x și y ale unui graf neorientat și conex G se notează $d(x,y)$ și reprezintă lungimea minimă a lanțurilor dintre x și y în G .

Definiția 4. Diametrul unui graf conex G reprezintă distanța maximă între perechile de vârfuri ale lui G și se notează prin $d(G)$.

Următorul rezultat, prezentat în [2] ne va conduce către o metodă de numărare a P_k -grafurilor cu n varfuri:

Teorema 3. Aproape toate grafurile neorientate cu n vârfuri au diametrul egal cu 2 pentru $n \rightarrow \infty$, sau dacă notăm cu $d_2(n)$ numărul grafurilor cu n vârfuri din mulțimea X , care au diametrul egal cu 2, avem: $\frac{d_2(n)}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1$ când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație:

Vom considera mulțimea celor $2^{C_n^2}$ grafuri cu vârfurile în mulțimea $X = \{1, \dots, n\}$ și să notăm prin G_{ij} mulțimea acelor grafuri care au proprietățile:

- (i) Vârfurile i și j nu sunt adiacente;
- (ii) Pentru orice alt vârf k , dacă vârfurile i și k sunt adiacente, atunci vârfurile k și j nu sunt adiacente.

Deci, pentru orice k diferit de i și j , avem trei posibilități de a uni prin muchii vârfurile i, j și k (k poate fi unit cu 0 vârfuri sau 1 vârf dintre i și j). Deoarece perechile de vârfuri în care nu apar nici x nici y pot fi unite prin muchii în două moduri, rezultă $|G_{ij}| = 3^{n-2} 2^{C_{n-2}^2}$ pentru orice i diferit de j .

Mulțimea grafurilor neorientate cu mulțimea vârfurilor X și diametrul cel puțin 3 este reuniunea mulțimilor G_{ij} . Să notăm cu U_n aceasta reuniune. Obținem:

$$|U_n| \leq \sum_{i < j} |G_{ij}| = C_n^2 3^{n-2} 2^{C_{n-2}^2}$$

de unde rezultă:

$$\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \leq \frac{C_n^2 3^{n-2} 2^{C_{n-2}^2}}{2^{C_n^2}} = \frac{8}{9} C_n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Din ultima egalitate deducem ca $\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, ceea ce este

echivalent cu faptul că aproape toate grafurile cu n vârfuri au diametrul egal cu unu sau cu doi când $n \rightarrow \infty$. Există însă un singur graf cu diametrul egal cu unu și anume graful complet K_n și astfel $d_2(n) = 2^{C_n^2} - |U_n| - 1$. În concluzie avem

$\frac{d_2(n)}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1$ când $n \rightarrow \infty$ sau, echivalent, aproape toate grafurile cu n vârfuri au diametrul egal cu doi când $n \rightarrow \infty$. □

Corolar 4. Dacă notăm cu C_n numărul grafurilor conexe cu n vârfuri, atunci are loc:

$$\frac{C_n}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1, \text{ când } n \rightarrow \infty$$

sau, echivalent, aproape toate grafurile cu n vârfuri sunt conexe, când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație:

Orice graf care are diametrul egal cu doi este conex. De aici, deducem inegalitatea următoare:

$$d_2(n) \leq C_n.$$

Împărțind această inegalitate cu numărul grafurilor cu n vârfuri obținem:

$$\frac{d_2(n)}{2^{C_n^2}} \leq \frac{C_n}{2^{C_n^2}}.$$

Deoarece numărul grafurilor conexe cu n vârfuri este mai mic decât numărul grafurilor cu n vârfuri deducem inegalitatea:

$$\frac{C_n}{2^{C_n^2}} < 1.$$

Aplicând teorema cleștelui ultimelor două inegalități rezultă: $\frac{C_n}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1$ când $n \rightarrow \infty$. □

Numărul grafurilor conexe cu n vârfuri poate fi calculat utilizând următorul rezultat din [2]:

Propozitia 5. Numărul C_n verifică următoarea relație de recurență:

$$C_n = 2^{C_n^2} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k C_n^k 2^{C_{n-k}^2} C_k C_n$$

pentru $n \geq 3$ și $C_1 = C_2 = 1$.

Demonstrație:

Este evident că, $C_1 = 1$ deoarece există un singur graf cu un vârf și acesta este conex. De asemenea, $C_2 = 1$, deoarece există doar două grafuri conexe cu două vârfuri și numai unul este conex și anume acela care are o muchie.

Astfel, pentru $n \geq 3$, avem de demonstrat următoarea formulare echivalentă a recurenței din enunț:

$$n 2^{C_n^2} = \sum_{k=1}^n k C_n^k 2^{C_{n-k}^2} C_k.$$

Să observăm că $2^{C_n^2}$ reprezintă numărul tuturor grafurilor neorientate cu vârfurile în mulțimea $X = \{1, \dots, n\}$. Pentru fiecare graf neorientat putem marca un vârf oarecare în n moduri. Deci, $n 2^{C_n^2}$ reprezintă numărul grafurilor neorientate cu mulțimea vârfurilor X și cu un vârf marcat.

Să demonstrăm că și membrul drept al formulei anterioare reprezintă același lucru. Pentru aceasta vom considera un graf G cu mulțimea vârfurilor X care conține un vârf marcat. Fie i vârful marcat, cu $1 \leq i \leq n$. Vârful i aparține unei componente conexe C a grafului G . Vom nota numărul de vârfuri din C cu k . Rezultă $1 \leq k \leq n$, iar vârfurile din C nu sunt legate prin nici o muchie cu vârfurile din $X \setminus C$.

Vârfurile componente C pot fi alese în C_n^k moduri. Vârful care este marcat îl putem alege în k moduri (oricare dintre vârfurile componente C). Odată vârfurile componente C alese, există C_k variante de a forma un graf conex cu aceste vârfuri (deoarece C este componenta conexă a lui G). Asupra vârfurilor din $X \setminus C$ singura restricție pusă este să nu fie legate prin nici o muchie cu vârfurile din C , deci ele pot forma $2^{C_{n-k}^2}$ grafuri distincte. Ținând cont de observațiile făcute și de faptul că pentru $k=1, \dots, n$ se obțin toate cele $n \cdot 2^{C_n^2}$ grafuri neorientate cu mulțimea vârfurilor X și care conțin câte un vârf marcat, deducem că are loc egalitatea de la începutul demonstrației, care este echivalentă cu cea din enunțul propozitiei. \square

În continuare vom generaliza teorema 3 relativ la grafuri orientate. Cu toate că scopul acestui capitol este generalizarea noțiunii de P-graf relativ la grafuri neorientate, vom prezenta aici o teoremă de grafuri orientate, datorită similitudinii cu teorema 3.

Teorema 4. Aproape toate grafurile orientate cu n vârfuri au proprietatea că pentru oricare două vârfuri distincte x și y există un drum de lungime unu sau doi de la x la y sau, notând cu $D_2(n)$ numărul grafurilor cu n vârfuri care au proprietatea anterioară, avem:

$$\frac{D_2(n)}{4^{C_n^2}} \rightarrow 1, \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Demonstrație:

Începem prin a observa că există $4^{C_n^2}$ grafuri cu vârfurile în mulțimea $X = \{1, \dots, n\}$, deoarece între oricare două vârfuri distincte x și y putem pune zero, una sau două muchii.

Vom considera G_{ij} mulțimea acelor grafuri care au proprietățile:

- (i) Din vârful i nu pleacă o muchie spre vârful j ;
- (ii) Pentru orice alt vârf k , dacă din vârful i pleacă o muchie către k , atunci din vârful k nu pleacă o muchie spre vârful j .

Pentru orice k diferit de i și j , există 16 variante posibile de a uni prin muchii vârful k de vârfurile i și j . Pentru a face parte din G_{ij} , dintre aceste variante trebuie exclusă cele descrise în (ii). Deoarece perechile de vârfuri în care nu apar nici x nici y pot fi unite prin muchii în patru moduri, rezultă $|G_{ij}| = 12^{n-2} 4^{C_{n-2}^2}$ pentru orice i diferit de j .

Mulțimea grafurilor orientate cu mulțimea vârfurilor X astfel încât există două vârfuri distincte x și y cu proprietatea că nu există drum de lungime unu sau doi de la x la y , este reuniunea mulțimilor G_{ij} . Să notăm cu V_n această reuniune. Obținem:

$$|V_n| \leq \sum_{i \neq j} |G_{ij}| = 2C_n^2 12^{n-2} 4^{C_{n-2}^2}$$

de unde rezultă:

$$\frac{|V_n|}{4^{C_n^2}} = \frac{2C_n^2 12^{n-2} 4^{C_{n-2}^2}}{4^{C_n^2}} = \frac{8}{9} C_n^2 \left(\frac{12}{16}\right)^n.$$

Spre deosebire de cazul grafurilor neorientate, sensul muchiilor contează. Astfel, dacă nu există un drum de la x la y , este posibil totuși să existe un drum de la y la x . Astfel, G_{ij} și G_{ji} sunt mulțimi diferite în cazul grafurilor orientate și suma trebuie făcută după $i \neq j$ în loc de $i < j$ (cum era în cazul grafurilor neorientate).

Din ultima egalitate deducem că $\frac{|V_n|}{4^{C_n^2}} \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$.

Deoarece $D_2(n) = 4^{C_n^2} - |V_n|$, avem $\frac{D_2(n)}{4^{C_n^2}} \rightarrow 1$, când $n \rightarrow \infty$, ceea ce este

echivalent cu faptul că aproape toate grafurile orientate cu n vârfuri au proprietatea că pentru oricare vârfuri distincte x și y există un drum de lungime cel mult doi de la x la y , când $n \rightarrow \infty$. \square

Definiția 5. Notăm cu $p_k(n)$ numărul P_k -grafurilor cu n vârfuri.

Observația 4. Este adevărat următorul șir de inegalități pentru orice n natural:

$$p_k(n) \leq \dots \leq p_3(n) \leq p_2(n) \leq C_n.$$

Această inegalitate este evidentă, deoarece orice P_k -graf este în același timp și P_{k-1} -graf, iar orice P_2 -graf (P -graf) este graf conex, deoarece pentru fiecare două vârfuri distincte există un lanț de lungime doi cu extremitățile în vârfurile respective.

Pornind de la metoda de numărare descrisă în Teorema 3 vom demonstra că aproape orice graf este P_k -graf când $n \rightarrow \infty$. Acest fapt va reieși din următoarea teoremă:

Teorema 5. Are loc: $\frac{p_k(n)}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1$, când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație:

Mai întâi vom majora numărul grafurilor cu n vârfuri și care nu sunt P_k -grafuri și vom arată că numărul acestora raportat la numărul total de grafuri cu n vârfuri reprezintă termenul unui șir care tinde către 0.

Vom nota cu $X = \{1, \dots, n\}$ mulțimea vârfurilor grafurilor asupra cărora facem raționamentul. Conform definiției 1, un graf G nu este P_k -graf dacă există un k -uplet (x_1, \dots, x_k) de vârfuri distincte din $V(G)$ care nu are proprietatea P_k , adică nu există un vârf y al grafului G , diferit de x_1, x_2, \dots, x_k , cu proprietatea că y este adiacent cu x_1, x_2, \dots, x_k .

Să notăm prin $G_{i_1 i_2 \dots i_k}$ mulțimea acelor grafuri pentru care k -upletul (i_1, \dots, i_k) de vârfuri distincte două câte două, nu are proprietatea P_k . Pentru ca un graf să facă parte dintr-o astfel de mulțime, pentru orice vârf y diferit de i_1, \dots, i_k avem $2^k - 1$ posibilități de a uni prin muchii vârful y de varfurile i_1, \dots, i_k (există în total 2^k variante dintre care trebuie exclusă varianta în care y este adiacent cu toate vârfurile din mulțimea $\{i_1, \dots, i_k\}$). Perechile de vârfuri în care nu apare nici un vârf din mulțimea $\{i_1, \dots, i_k\}$ pot fi unite prin muchii în două moduri. Graful de vârfuri i_1, \dots, i_k poate fi construit în $2^{C_k^2}$ moduri. Vârfurile diferite de i_1, \dots, i_k formează un graf ce poate fi construit în $2^{C_{n-k}^2}$ moduri. Astfel, putem deduce următoarea formulă:

$$|G_{i_1 \dots i_k}| = 2^{C_k^2} (2^k - 1)^{n-k} 2^{C_{n-k}^2}$$

pentru orice i_1, \dots, i_k vârfuri din X distincte două câte două.

Mulțimea grafurilor neorientate cu mulțimea vârfurilor X și care nu sunt P_k -grafuri este dată de reuniunea mulțimilor $G_{i_1 \dots i_k}$, unde $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Să notăm cu U_n aceasta reuniune. Obținem:

$$|U_n| \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |G_{i_1 \dots i_k}| = C_n^k 2^{C_k^2} (2^k - 1)^{n-k} 2^{C_{n-k}^2}$$

de unde rezultă:

$$\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \leq \frac{C_n^k 2^{C_k^2} (2^k - 1)^{n-k} 2^{C_{n-k}^2}}{2^{C_n^2}} = C_n^k \left(\frac{2^k - 1}{2^k} \right)^{n-k}.$$

Deoarece C_n^k reprezintă un polinom de grad k în variabila n , iar $\frac{2^k - 1}{2^k} < 1$, din ultima egalitate deducem că $\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$.

Din definiție, $p_k(n) = 2^{C_n^2} - |U_n|$.

Așadar avem $\frac{p_k(n)}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1$, când $n \rightarrow \infty$ sau, echivalent, aproape toate grafurile cu n vârfuri sunt P_k -grafuri, când $n \rightarrow \infty$. \square

Folosind această teoremă și Observația 4 putem deasemenea desprinde că aproape toate grafurile cu n vârfuri sunt conexe, când $n \rightarrow \infty$.

3. Q_k GRAFURI

Dacă până acum am generalizat noțiunea de P -graf în sensul existenței unui vârf adiacent cu alte k vârfuri, în continuare vom generaliza P -grafurile în sensul dat de definiția următoare:

Definiția 6. Spunem că o pereche (x, y) de vârfuri distincte ale unui graf neorientat G are proprietatea Q_k dacă există un lanț de lungime k între x și y , format din vârfuri distincte ale lui G . Spunem că G este un Q_k -graf dacă orice pereche (x, y) de vârfuri distincte ale lui G are proprietatea Q_k .

Se poate ușor observa că în cazul $k = 2$ atât P_k -grafurile cât și Q_k -grafurile se confunda cu P -grafurile.

Observația 5. Pentru orice n și orice k numere naturale cu $n \geq k + 1$, există grafuri cu n vârfuri care sunt Q_k -grafuri și există grafuri cu n vârfuri care nu sunt Q_k -grafuri. Este suficient să observăm că graful complet K_n este un Q_k -graf, iar graful cu n vârfuri și fără muchii nu este un Q_k -graf.

Definiția 7. Notăm cu $b_k(n)$ numărul minim de muchii ale unui Q_k -graf cu n vârfuri.

Vom demonstra în continuare o propoziție prin care se face trecerea de la A -grafuri sau B -grafuri la Q_{k+2} -grafuri. Ca o consecință a acestei propoziții, vom obține o estimare a numărului minim de muchii ale unui Q_k -graf.

Propoziția 6. Fie $G(V,E)$ un A-graf [4] cu n vârfuri sau un B-graf [4] cu n vârfuri după cum n este număr impar sau par. Fie $\{x_1, \dots, x_k\}$ vârfuri astfel încât $\{x_1, \dots, x_k\} \not\subset V(G)$. Construim graful G_1 care se obține din G prin adăugarea vârfurilor $\{x_1, \dots, x_k\}$ pe care le unim cu vârfurile lui G în toate modurile posibile și le unim și între ele în toate modurile posibile. Atunci graful G_1 este un Q_{k+2} -graf cu $n+k$ vârfuri.

Demonstrație:

Să notăm cu w centrul lui G . Conform definițiilor din [4], centrul unui A-graf sau B-graf este un vârf adiacent cu toate celelalte vârfuri ale grafului respectiv. În cazul $n=3$ sau $n=4$ putem avea mai mult de un centru. În acest caz fixăm w ca fiind unul dintre centre.

Alegem două vârfuri distincte ale lui G_1 . Fie aceste vârfuri x și y . Dorim să arătăm că între x și y există un lanț de lungime $k+2$ format din vârfuri distincte ale lui G_1 . Deosebim patru cazuri:

- (i) x și y aparțin ambele mulțimii $\{x_1, \dots, x_k\}$. Putem presupune $x = x_1$ și $y = x_2$. Deoarece G este ori A-graf ori B-graf, putem alege u și v două vârfuri ale lui G , astfel încât uvw să fie un triunghi (privit din punctul de vedere al muchiilor) în G . Atunci ca lanț de lungime $k+2$ între x și y poate fi considerat: $x, x_3, \dots, x_k, u, v, w$. Evident vârfurile lanțului sunt distincte două câte două.
 - (ii) $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$, iar y este un vârf al lui G . Putem considera că $x = x_1$. Fie u și v două vârfuri ale lui G astfel încât yuv să fie un triunghi în G (astfel de triunghi există deoarece G este A-graf sau B-graf). Atunci considerăm lanțul următor de lungime $k+2$: $x, x_2, \dots, x_k, u, v, y$. Evident vârfurile lanțului sunt distincte două câte două.
 - (iii) x și y sunt vârfuri distincte ale lui G , ambele diferite de w , centrul lui G . Atunci considerăm lanțul următor de lungime $k+2$: x, x_1, \dots, x_k, w, y . Și vârfurile acestui lanț sunt diferite între ele.
 - (iv) x și y sunt vârfuri ale lui G cu $y = w$. Atunci, deoarece graful G este ori A-graf ori B-graf, există un vârf u al lui G astfel încât xyu este triunghi în G . Atunci considerăm lanțul următor de lungime $k+2$: x, x_1, \dots, x_k, u, y . Evident, vârfurile lanțului sunt distincte două câte două.
- Din analiza acestor patru cazuri deducem că oricare pereche de vârfuri din $V(G_1)$ are proprietatea Q_{k+2} , deci putem afirma că G_1 este un Q_{k+2} -graf. \square

Teorema 6. Pentru k și n două numere naturale astfel încât $n \geq k+1$, are loc următoarea inegalitate:

$$b_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1.$$

Demonstrație:

În cazul $k=2$ un Q_2 -graf este de fapt un P-graf și, conform teoremei de caracterizare a P-grafurilor minimale, obținem

$$b_2(n) = n - 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{(2n-2)(2-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 1.$$

În plus, structura unui Q_2 -graf cu n vârfuri și $b_2(n)$ muchii este unică: A-graf sau B-graf. Implicit și inegalitatea din concluzia teoremei este verificată.

În cazul $k > 2$ să considerăm Q_2 -graful minimal G cu $n-(k-2)$ vârfuri. Prin procedeul descris în propoziția 6, obținem G_1 un Q_k -graf prin adăugarea a $k-2$ vârfuri grafului G .

Avem:

$$|E(G)| = n - (k-2) - 1 + \left\lceil \frac{n-(k-2)}{2} \right\rceil.$$

Între cele $k-2$ vârfuri adăugate la G apar încă C_{k-2}^2 muchii. Între cele $k-2$ vârfuri adăugate la G și vârfurile deja existente în G apar încă $(n-(k-2))(k-2)$ muchii. Astfel, numărul de muchii ale grafului G_1 este:

$$|E(G_1)| = C_{k-2}^2 + (n-(k-2))(k-2) + n - (k-2) - 1 + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1.$$

Simplificând expresia rezultată, obținem:

$$|E(G_1)| = \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1.$$

Tot din propoziția 6, rezultă că G_1 este un Q_k -graf. În concluzie, $|E(G_1)| \geq b_k(n)$, fapt din care se deduce inegalitatea din concluzia teoremei. \square

Observația 6. Majorarea anterioară pentru $b_k(n)$ este bună și pentru $a_k(n)$ după cum rezultă din teorema 1. Însă, spre deosebire de teorema 1, nu se atinge egalitate în cazul în care $n = k + 1$. Pentru a demonstra acest fapt să considerăm graful G ca fiind graful cu patru vârfuri obținut din K_5 (Figura 1) prin suprimarea unei muchii oarecare. Fie $\{x, y, u, v, w\}$ vârfurile acestui graf și să presupunem că muchia suprimată din K_5 a fost muchia xy .

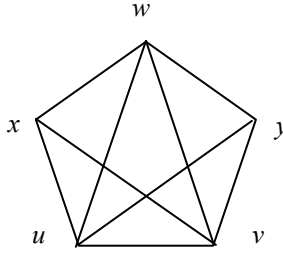


Figura 1: Graf pentru care nu se atinge egalitatea când $n = k + 1$

Astfel, perechea (u, v) are proprietatea Q_4 deoarece avem lanțul v, y, w, x, u . Analog, obținem că perechile (u, w) și (v, w) au proprietatea Q_4 . Perechea (x, u) are proprietatea Q_4 deoarece există lanțul x, v, w, y, u . Analog, se arată că perechile (x, v) , (x, w) , (y, u) , (y, v) și (y, w) au proprietatea Q_4 . Perechea (x, y) are proprietatea Q_4 , deoarece există lanțul x, u, v, w, y . Deci, orice pereche de vârfuri distincte ale lui G are proprietatea Q_4 , deci G este un Q_4 -graf cu 9 muchii. În concluzie, $b_2(5) \leq 9$.

Din inegalitatea din teorema anterioară ar fi rezultat că

$$b_2(5) \leq \frac{(10-4)(4-1)}{2} + \left\lceil \frac{5-4}{2} \right\rceil + 1 = 10.$$

În concluzie, nu se atinge egalitate în cazul $n = k + 1$, așa cum avea loc în cadrul Teoremei 1. Să observăm deasemenea că $n = 5$ și $k = 4$ nu este caz izolat în care nu se atinge egalitatea. Pentru orice $n = k + 1$ putem considera graful obținut din K_n prin suprimarea unei muchii și, după un raționament analog obținem că nu se atinge egalitatea în teorema 6.

Propozitia 7. Orice Q_k -graf este 2 muchie conex.

Demonstrație:

Un Q_k -graf $G(V, E)$ este graf conex deoarece pentru orice două vârfuri există un lanț de lungime k cu extremitățile în cele două vârfuri. Fie $xy \in E(G)$ și G_1 graful obținut din G prin suprimarea muchiei xy . Fie $u, v \in V(G)$ două vârfuri unite în G printr-un lanț L (deoarece G este conex, un astfel de lanț există).

Deoarece G este un Q_k -graf, există în G un lanț L_1 de lungime k între x și y , format din vârfuri distincte ale lui G . Deoarece k este cel puțin egal cu doi, muchia xy nu poate aparține lanțului L_1 . Atunci înlocuind în L muchia xy (dacă aceasta apare) cu muchiile lanțului L_1 , obținem un lanț între u și v în G_1 . Deducem astfel că G_1 este conex și, cum muchia xy a fost aleasă arbitrar, rezultă că graful G este 2 muchie conex. \square

Corolar 5. Are loc inegalitatea:

$$b_2(n) \leq n.$$

Demonstrație:

Fie $G(V,E)$ un Q_k -graf oarecare. Conform definiției unui Q_k -graf, deducem că este imposibil să avem $|E(G)| = 0$. Fie xy o muchie a lui G și G_1 graful obținut din G prin suprimarea muchiei xy . Din Propoziția 7 avem G_1 graf conex. Este cunoscut faptul că un graf conex cu n vârfuri are cel puțin $n-1$ muchii. De aici, deducem că

$$|E(G_1)| \geq |V(G_1)| - 1 = n - 1$$

deci

$$|E(G)| \geq n - 1 + 1 = n \text{ muchii}$$

Din definiția lui $b_k(n)$ și datorită faptului că G este un Q_k -graf arbitrar ales, deducem $b_2(n) \leq n$. □

Astfel, din rezultatele anterioare putem deduce următoarea încadrare pentru $b_k(n)$:

$$n \leq b_k(n) \leq \frac{(2n-k)(k-1)}{2} + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil + 1.$$

Definiția 8. Notăm cu $q_k(n)$ numărul Q_k -grafurilor cu n vârfuri. De asemenea, să notăm cu $l_k(n)$ numărul grafurilor cu n vârfuri și care nu au proprietatea Q_k .

Vom da în continuare o propoziție care estimează numărul $l_k(n)$, propoziție care va conduce la o teoremă ce caracterizează numărul $q_k(n)$, când $n \rightarrow \infty$.

Propoziția 8. Fie k un număr natural mai mare sau egal cu doi. Atunci există un polinom R_k în variabila n , polinom care satisface inegalitatea următoare:

$$\frac{l_k(n)}{2^{\binom{n}{2}}} \leq R_k(n) \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

pentru oricare n număr natural.

Demonstrație:

Să observăm mai întâi că pentru $k = 2$, Q_2 -grafurile și P_2 -grafurile coincid.

În cazul $k=2$, în demonstrația teoremei 5 numărul $|U_n|$ coincide cu $l_2(n)$. Am obținut în teorema 5 următoarea estimare:

$$\frac{|U_n|}{2^{C_n^2}} \leq \frac{C_n^k 2^{C_k^2} (2^k - 1)^{n-k} 2^{C_{n-k}^2}}{2^{C_n^2}} = C_n^k \left(\frac{2^k - 1}{2^k} \right)^{n-k}.$$

Punând $k = 2$ și înlocuind $|U_n|$ cu $l_2(n)$ obținem:

$$\frac{l_2(n)}{2^{C_n^2}} \leq C_n^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = R_2(n) \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Am considerat $R_2(n) = \frac{16}{9} C_n^2$.

Scriind dezvoltarea pentru C_n^2 , se observă că R_2 este un polinom de gradul doi în variabila n . Astfel, în cazul $k=2$, concluzia propoziției 8 este adevărată. Acest lucru ne permite o demonstrație a propoziției prin inducție asupra lui k .

Să presupunem concluzia adevărată pentru $k-1$, unde $k \geq 3$ și să o demonstrăm pentru k .

Pentru un vârf x din mulțimea $X = \{1, \dots, n\}$ vom nota cu G_{xy} mulțimea acelor grafuri G cu $V(G) = X$, pentru care între x și y nu există un lanț de lungime k . Exista trei cazuri:

- (i) vârfurile x nu este adiacent cu nici unul dintre varfurile din $X \setminus \{x\}$. Atunci numărul acestor grafuri este $2^{C_{n-1}^2}$, număr care reprezintă totalitatea grafurilor G_1 pentru care $V(G_1) = X \setminus \{x\}$.
- (ii) vârfurile x este adiacent doar cu vârfurile y . Numărul acestor grafuri este majorat de $2^{C_{n-1}^2}$.
- (iii) vârfurile x este adiacent cu cel puțin un vârf z din mulțimea $X \setminus \{x, y\}$. Fie atunci G_2 grafurile obținute din G prin suprimarea vârfurilor x și a muchiilor incidente. Dacă G_2 ar fi un Q_{k-1} -graf, atunci între z și y ar exista în G_2 un lanț de lungime $k-1$ format din vârfuri distincte două câte două, deci între x și y ar exista un lanț de lungime k format din vârfuri distincte două câte două. Aceasta reprezintă o contradicție cu definiția lui G_{xy} . Deci, G_2 nu este Q_{k-1} -graf. În concluzie, dându-se vârfurile adiacente cu x , putem majora în acest caz numărul grafurilor cu $l_{k-1}(n-1)$. Însa avem $2^{n-1} - 2$ variante de a uni vârfurile x cu vârfurile din $X \setminus \{x\}$ astfel încât x să fie adiacent cu cel puțin un vârf din mulțimea $X \setminus \{x, y\}$.

Din analiza acestor trei cazuri, putem majora $|G_{xy}|$ astfel:

$$|G_{xy}| \leq 2^{C_{n-1}^2+1} + (2^{n-1} - 2)l_{k-1}(n-1).$$

Deoarece fiecare graf cu n vârfuri și care nu este Q_k -graf face parte din una din mulțimile G_{xy} , deducem ca $l_k(n) = \left| \bigcup_{i < j} G_{ij} \right|$. Cum cardinalul reuniunii este cel mult suma cardinalelor mulțimilor din reuniune, obținem inegalitatea:

$$l_k(n) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} G_{ij} \leq C_n^2 (2^{C_n^2-1} + (2^{n-1} - 2) l_{k-1}(n-1)).$$

Împărțind inegalitatea cu numărul grafurilor cu n vârfuri, rezultă:

$$\frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \leq C_n^2 \left(\frac{2}{2^{n-1}} + \left(\frac{2^{n-1} - 2}{2^{n-1}} \right) \frac{l_{k-1}(n-1)}{2^{C_{n-1}^2}} \right) \leq C_n^2 \left(\frac{2}{2^{n-1}} + R_{k-1}(n-1) \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right).$$

În deducerea ultimei părți a inegalității de mai sus am folosit faptul că

$$\frac{2^{n-1} - 2}{2^{n-2}} < 1.$$

Se poate verifica ușor inegalitatea:

$$\frac{2}{2^{n-1}} \leq 9 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

pentru fiecare n număr natural.

Obținem următoarea inegalitate:

$$\frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \leq C_n^2 \left(9 + \frac{4}{3} R_{k-1}(n-1) \right) \left(\frac{3}{4} \right)^n.$$

Dacă definim $R_k(n) = C_n^2 \left(9 + \frac{4}{3} R_{k-1}(n-1) \right)$, atunci se poate ușor observa că R_k este un polinom în variabila n . Pasul de inducție este complet demonstrat. \square

Teorema 7. Limita raportului $\frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}}$ este unu când $n \rightarrow \infty$, sau, echivalent,

aproape orice graf cu n vârfuri are proprietatea că între oricare două vârfuri distincte există un lanț de lungime k , format din vârfuri distincte două câte două, când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație:

Avem egalitatea $q_k(n) + l_k(n) = 2^{C_n^2}$ deoarece orice graf cu n vârfuri ori este Q_k -graf, ori nu este Q_k -graf. Din propoziția 8, avem inegalitatea:

$$0 \leq \frac{l_k(n)}{2^{C_n^2}} \leq R_k(n) \left(\frac{3}{4} \right)^n,$$

sau, echivalent,

$$0 \leq 1 - \frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}} \leq R_k(n) \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Trecând la limită când $n \rightarrow \infty$ și aplicând criteriul cleștelui, obținem:

$$1 - \frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}} \rightarrow 0.$$

În concluzie : $\frac{q_k(n)}{2^{C_n^2}} \rightarrow 1$ cand $n \rightarrow \infty$. □

4. LABIRINTURI MATRICIALE

În incheierea acestui articol, ca o completare la teoremele de estimare prezentate, dăm câteva noțiuni și un rezultat despre labirinturile matriciale.

Definiția 5. Numim *labirint matricial* o matrice $L_{m,n}$ cu proprietatea ca $l_{ij} \in \{0, 1\}$ pentru orice i între 1 și m și orice j între 1 și n . Dacă $l_{ij} = 1$ numim celula (i,j) *perete*, iar dacă $l_{ij} = 0$ numim celula (i,j) *coridor*. Un exemplu de labirint matricial este prezentat în figura următoare:

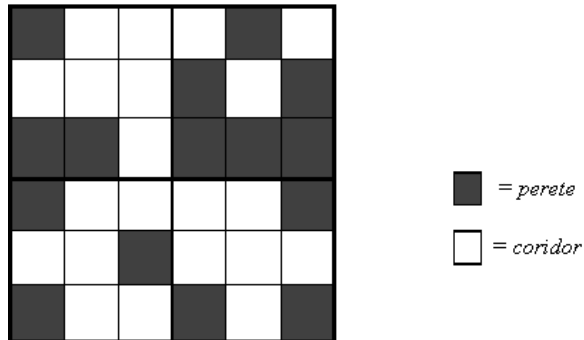


Figura 2: Labirint matricial

O persoană se poate afla la un moment doar în celulele (i,j) unde $l_{ij} = 0$. Din celula (i,j) persoana se poate deplasa doar în celulele $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$ în cazul în care acestea nu sunt pereți.

Definiția 6. Numim graf asociat labirintului L un graf $G_L(V, E)$, unde $V = \{(i, j) \mid \text{cu } l_{ij} = 0\}$, iar $E = \{(i, j), (k, p) \mid (i, j), (k, p) \in V, \text{ iar } |i - k| + |j - p| = 1\}$.

Astfel, muchiile grafului asociat unui labirint sunt între două celule coridor adiacente (între care se poate deplasa cu un pas persoana).

Definiția 7. Un labirint L este “acceptabil” dacă oricare ar fi $(i, j) \in V(G_L)$ există un lanț în G_L cu o extremitate în (i, j) , iar a doua în (k, p) , unde $k \in \{1, m\}$ sau $p \in \{1, n\}$. Celulele coridor (k, p) cu $k \in \{1, m\}$, sau $p \in \{1, n\}$ corespund de fapt ieșirilor din labirint. Astfel, o definiție echivalentă ar fi următoarea: un labirint este “acceptabil” dacă din oricare celulă coridor (i, j) se poate ieși din labirint.

Ca o problema de numărare, ne propunem să estimăm numărul labirinturilor acceptabile. Este evident, că nu orice labirint este acceptabil. Pentru a vedea acest fapt este suficient să observăm ca orice labirint L cu proprietatea $l_{ij} = 1$ pentru $i \in \{1, m\}$ sau $j \in \{1, n\}$ nu este acceptabil. Este de asemenea evident că există labirinturi acceptabile (consideram $L = 0_{mn}$). Consideram mai întâi cazul labirinturilor matriciale pătratice. Să notăm cu $l(n)$ numărul labirinturilor matriciale acceptabile de forma L_{nn} , iar cu $L(n)$ numărul labirinturilor matriciale L_{nn} .

Observația 7. $L(n) = 2^{n^2}$.

Acest fapt reiese deoarece există n^2 celule în labirint, fiecare putând fi ori coridor, ori perete.

Avem următorul rezultat:

Teorema 1. $\frac{l(n)}{L(n)} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrația 1:

Fie $k = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Împărțim labirintul în k^2 zone 3×3 și $n^2 - 9k^2$ celule. Observăm că

dacă o zonă 3×3 este de forma următoare (pătratele din colțuri pot fi coridoare sau pereți, însă celulele adiacente colțurilor sunt pereți, iar celula din centru este coridor), atunci labirintul nu este acceptabil.

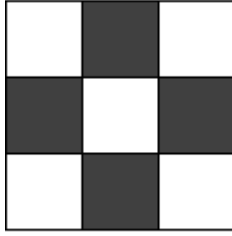


Figura 3: Configurație din care nu se poate ieși din labirint.

Probabilitatea ca o zonă să fie de forma aceasta este $\frac{1}{32}$, deoarece există în total 2^9 variante dintre care 2^4 sunt acceptabile (putem alege colțurile în 2^4 moduri).

În concluzie, probabilitatea ca o zonă să nu fie de forma aceasta este $\frac{31}{32}$, ceea ce duce la faptul că probabilitatea ca nici-o zonă să nu fie de forma aceasta este $\left(\frac{31}{32}\right)^{k^2}$. Înseamnă că numărul total al labirinturilor acceptabile poate fi majorat

cu: $\left(\frac{31}{32}\right)^{k^2} L(n)$. Avem atunci următoarea inegalitate:

$$0 \leq \frac{l(n)}{L(n)} \leq \left(\frac{31}{32}\right)^{k^2}.$$

Dar $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, deci are loc: $\left(\frac{31}{32}\right)^{k^2} \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$.

Aplicând teorema cleștelui, obținem $\frac{l(n)}{L(n)} \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$. □

5. CONCLUZII

În acest articol au fost introduse noțiunile de P_k -graf neorientat și de Q_k -graf, doua generalizari ale notiunii de P-graf prezentata [4]. Principalele rezultate prezinta margini asupra numarului minim de muchii pe care aceste grafuri pot sa le aiba. Deasemenea, este caracterizata densitatea acestor tipuri de grafuri relativ la multimea tuturor grafurilor. Un rezultat asemanator este demonstrat pentru labirinturile matriciale care au proprietatea ca exista un drum de iesire din labirint din orice pozitie. În viitor, ne propunem sa studiem generalizari ale P-grafurilor si ale notiunilor prezentate în acest articol, dar pentru grafuri orientate.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Erdos, A. Renyi, V. Sos, On a problem of graph theory, *Studia Sci. Math.*, Nr. 1 (1966), 215-235.
2. Ioan Tomescu, Probleme de combinatorica si teoria grafurilor, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1981.
3. Ioan Tomescu, Introduction to combinatorics, Collet's (Publishers) Ltd., London and Wellingborough, 1975.
4. R.S.Niculescu, M.F.Niculescu, A problem of minimum in graph theory, *Sudii și Cercetări Matematice*, Vol.2(52), No.3(2000), 337-343.
5. J.A. Bondy, Counting subgraphs. A new approach to the Caccetta-Haggkvist conjecture, *Discrete Mathematics* 165/166 (1997) 71-80.
6. L. Lovasz, Combinatorial problems and exercises, Akademiai Kiado, Budapest, 1979.
7. Claude Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris, 1970.
8. Claude Berge, Teoria grafurilor si aplicatiile ei, Editura Tehnica, Bucuresti, 1969.