Inference Rules for Constructive Logic

Akshina Gupta, Avery Cowan, and Karl Crary

November 2026

Contents

Natural Deduction **3**

Natural Deduction with Contexts **4**

Proof Terms **5**

Verifications and Uses **6**

Quantification **7**

Heyting Arithmetic **8**

Sequent Calculus **9**

Classical Logic **10**

Reduced Sequent Calculus **11**

Inversion Calculus **12**

Backchaining **13**

Forward Chaining **14**

Focused Logic **15**

Linear Logic **17**

Ordered Logic **18**

Modal Logic **19**

Session Types **20**

Natural Deduction

Conjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{true}}{A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge I \qquad \frac{A \wedge B\ \mathsf{true}}{A\ \mathsf{true}}\ \wedge E1 \qquad \frac{A \wedge B\ \mathsf{true}}{B\ \mathsf{true}}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I1 \qquad \frac{B\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I2 \qquad \frac{A \vee B\ \mathsf{true} \quad \begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ C\ \mathsf{true}\end{array} \quad \begin{array}{c}[B\ \mathsf{true}]_v \\ \vdots \\ C\ \mathsf{true}\end{array}}{C\ \mathsf{true}}\ \vee E^{u,v}$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ B\ \mathsf{true}\end{array}}{A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset I^u \qquad \frac{A \supset B\ \mathsf{true} \quad A\ \mathsf{true}}{B\ \mathsf{true}}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{T\ \mathsf{true}}\ TI \qquad \frac{F\ \mathsf{true}}{C\ \mathsf{true}}\ FE$$

Natural Deduction with Contexts

Hypothesis

$$\frac{A\ \mathsf{true} \in \Gamma}{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp$$

Conjunction

$$\frac{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ \wedge E1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{\Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true} \quad \Gamma, A\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{true} \quad \Gamma, B\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ \vee E$$

Implication

$$\frac{\Gamma, A\ \mathsf{true} \vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset I \qquad \frac{\Gamma \vdash A \supset B\ \mathsf{true} \quad \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Gamma \vdash T\ \mathsf{true}}\ TI \qquad \frac{\Gamma \vdash F\ \mathsf{true}}{\Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ FE$$

Proof Terms

Conjunction

$$\frac{M : A \quad N : B}{\langle M, N \rangle : A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{M : A \wedge B}{\mathsf{fst}\, M : A}\ \wedge E1 \qquad \frac{M : A \wedge B}{\mathsf{snd}\, M : B}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{M : A}{\mathsf{inl}\, M : A \vee B}\ \vee I1 \qquad \frac{M : B}{\mathsf{inr}\, M : A \vee B}\ \vee I2 \qquad \frac{M : A \vee B \quad \begin{array}{c}[x : A] \\ \vdots \\ M_1 : C\end{array} \quad \begin{array}{c}[y : B] \\ \vdots \\ M_2 : C\end{array}}{\mathsf{case}(M, x.M_1, y.M_2) : C}\ \vee E$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[x : A] \\ \vdots \\ M : B\end{array}}{\lambda x.M : A \supset B}\ \supset I \qquad \frac{M : A \supset B \quad N : A}{M\, N : B}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\langle\rangle : T}\ TI \qquad \frac{M : F}{\mathsf{abort}\, M : C}\ FE$$

Verifications and Uses

Conjunction

$$\frac{A\uparrow \quad B\uparrow}{A\wedge B\uparrow}\wedge\uparrow \qquad \frac{A\wedge B\downarrow}{A\downarrow}\wedge\downarrow 1 \qquad \frac{A\wedge B\downarrow}{B\downarrow}\wedge\downarrow 2$$

Disjunction

$$\frac{A\uparrow}{A\vee B\uparrow}\vee\uparrow 1 \qquad \frac{B\uparrow}{A\vee B\uparrow}\vee\uparrow 2 \qquad \frac{\begin{array}{ccc} & [A\downarrow]_u & [B\downarrow]_v \\ A\vee B\downarrow & \vdots & \vdots \\ & C\uparrow & C\uparrow \end{array}}{C\uparrow}\vee\downarrow^{u,v}$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A\downarrow]_u \\ \vdots \\ B\uparrow\end{array}}{A\supset B\uparrow}\supset\uparrow^u \qquad \frac{A\supset B\downarrow \quad A\uparrow}{B\downarrow}\supset\downarrow$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{T\uparrow}T\uparrow \qquad \frac{F\downarrow}{C\uparrow}F\downarrow$$

Shift

$$\frac{A\downarrow \quad A\ \mathsf{atomic}}{A\uparrow}\downarrow\uparrow$$

Quantification

Universal Quantification

$$\frac{\begin{array}{c}[a:\tau]\\ \vdots\\ A(a)\ \mathsf{true}\end{array}}{\forall x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true}}\ \forall I^a \qquad\qquad \frac{\forall x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true} \quad m:\tau}{A(m)\ \mathsf{true}}\ \forall E$$

Existential Quantification

$$\frac{m:\tau \quad A(m)\ \mathsf{true}}{\exists x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true}}\ \exists I \qquad\qquad \frac{\exists x{:}\tau.A(x)\ \mathsf{true} \qquad \begin{array}{c}[a:\tau] \quad [A(a)\ \mathsf{true}]_u\\ \vdots\\ C\ \mathsf{true}\end{array}}{C\ \mathsf{true}}\ \exists E^{a,u}$$

Heyting Arithmetic

Natural Numbers

$$\frac{}{0 : \mathsf{nat}}\ \mathsf{nat}I_0 \qquad \frac{n : \mathsf{nat}}{s\,n : \mathsf{nat}}\ \mathsf{nat}I_s \qquad \frac{n : \mathsf{nat} \quad C(0)\ \mathsf{true} \qquad \begin{array}{c}[x : \mathsf{nat}] \quad [C(x)\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ C(s\,x)\ \mathsf{true}\end{array}}{C(n)\ \mathsf{true}}\ \mathsf{nat}E^{x,u}$$

Equality

$$\frac{}{0 = 0\ \mathsf{true}}\ =I_{00} \qquad \frac{m = n\ \mathsf{true}}{s\,m = s\,n\ \mathsf{true}}\ =I_{ss}$$

$$\frac{s\,m = s\,n\ \mathsf{true}}{m = n\ \mathsf{true}}\ =E_{ss} \qquad \frac{0 = s\,n\ \mathsf{true}}{C\ \mathsf{true}}\ =E_{0s} \qquad \frac{s\,n = 0\ \mathsf{true}}{C\ \mathsf{true}}\ =E_{s0}$$

Primitive Recursion

$$\frac{n : \mathsf{nat} \quad t_0 : \tau \qquad \begin{array}{c}[x : \mathsf{nat}] \quad [r : \tau] \\ \vdots \\ t_s : \tau\end{array}}{R(n, t_0, x\,r.t_s) : \tau}\ \mathsf{nat}E^{x,r}$$

$$\begin{array}{lcl} R(0, t_0, x\,r.t_s) & = & t_0 \\ R(s\,n, t_0, x\,r.t_s) & = & [R(n, t_0, x\,r.t_s)/r][n/x]t_s \end{array}$$

Sequent Calculus

Conjunction

$$\frac{\Delta \Longrightarrow A \quad \Delta \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow A \wedge B}\ \wedge R \qquad \frac{\Delta, A \wedge B, A \Longrightarrow C}{\Delta, A \wedge B \Longrightarrow C}\ \wedge L1 \qquad \frac{\Delta, A \wedge B, B \Longrightarrow C}{\Delta, A \wedge B \Longrightarrow C}\ \wedge L2$$

Disjunction

$$\frac{\Delta \Longrightarrow A}{\Delta \Longrightarrow A \vee B}\ \vee R1 \qquad \frac{\Delta \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow A \vee B}\ \vee R2 \qquad \frac{\Delta, A \vee B, A \Longrightarrow C \quad \Delta, A \vee B, B \Longrightarrow C}{\Delta, A \vee B \Longrightarrow C}\ \vee L$$

Implication

$$\frac{\Delta, A \Longrightarrow B}{\Delta \Longrightarrow A \supset B}\ \supset R \qquad \frac{\Delta, A \supset B \Longrightarrow A \quad \Delta, A \supset B, B \Longrightarrow C}{\Delta, A \supset B \Longrightarrow C}\ \supset L$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Delta \Longrightarrow T}\ TR \qquad \frac{}{\Delta, F \Longrightarrow C}\ FL$$

Initial

$$\frac{A \text{ atomic}}{\Delta, A \Longrightarrow A}\ init$$

Classical Logic

Conjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{true}}{A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge T \qquad \frac{A\ \mathsf{false}}{A \wedge B\ \mathsf{false}}\ \wedge F1 \qquad \frac{B\ \mathsf{false}}{A \wedge B\ \mathsf{false}}\ \wedge F2$$

Disjunction

$$\frac{A\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee T1 \qquad \frac{B\ \mathsf{true}}{A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee T2 \qquad \frac{A\ \mathsf{false} \quad B\ \mathsf{false}}{A \vee B\ \mathsf{false}}\ \vee F$$

Implication

$$\frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ B\ \mathsf{true}\end{array}}{A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset T^u \qquad \frac{A\ \mathsf{true} \quad B\ \mathsf{false}}{A \supset B\ \mathsf{false}}\ \supset F$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{T\ \mathsf{true}}\ TT \qquad \frac{}{F\ \mathsf{false}}\ FF$$

Negation

$$\frac{A\ \mathsf{false}}{\neg A\ \mathsf{true}}\ \neg T \qquad \frac{A\ \mathsf{true}}{\neg A\ \mathsf{false}}\ \neg F$$

Contradiction

$$\frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{false}]_u \\ \vdots \\ \#\end{array}}{A\ \mathsf{true}}\ T\#^u \qquad \frac{\begin{array}{c}[A\ \mathsf{true}]_u \\ \vdots \\ \#\end{array}}{A\ \mathsf{false}}\ F\#^u \qquad \frac{A\ \mathsf{true} \quad A\ \mathsf{false}}{\#}\ \#$$

Reduced Sequent Calculus

Conjunction

$$\frac{\Delta \longrightarrow A \quad \Delta \longrightarrow B}{\Delta \longrightarrow A \wedge B}\ \wedge R \qquad\qquad \frac{\Delta, A, B \longrightarrow C}{\Delta, A \wedge B \longrightarrow C}\ \wedge L$$

Disjunction

$$\frac{\Delta \longrightarrow A}{\Delta \longrightarrow A \vee B}\ \vee R1 \qquad \frac{\Delta \longrightarrow B}{\Delta \longrightarrow A \vee B}\ \vee R2 \qquad \frac{\Delta, A \longrightarrow C \quad \Delta, B \longrightarrow C}{\Delta, A \vee B \longrightarrow C}\ \vee L$$

Implication

$$\frac{\Delta, A \longrightarrow B}{\Delta \longrightarrow A \supset B}\ \supset R \qquad\qquad \frac{\Delta, A \supset B \longrightarrow A \quad \Delta, B \longrightarrow C}{\Delta, A \supset B \longrightarrow C}\ \supset L$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Delta \longrightarrow T}\ TR \qquad \frac{\Delta \longrightarrow C}{\Delta, T \longrightarrow C}\ TL \qquad \frac{}{\Delta, F \longrightarrow C}\ FL$$

Initial

$$\frac{A \text{ atomic}}{\Delta, A \longrightarrow A}\ init$$

Inversion Calculus

right inversion	$\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A$
left inversion	$\Delta; \Omega \xrightarrow{L} C^+$

Right Inversion

$$\frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \quad \Delta; \Omega \xrightarrow{R} B}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \wedge B}\ \wedge R \qquad \frac{}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} T}\ TR \qquad \frac{\Delta; \Omega, A \xrightarrow{R} B}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \supset B}\ \supset R$$

Switch

$$\frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} P}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} P}\ LR_P \qquad \frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} A \vee B}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} A \vee B}\ LR_\vee \qquad \frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} F}{\Delta; \Omega \xrightarrow{R} F}\ LR_F$$

Left Inversion

$$\frac{\Delta; \Omega, A, B \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, A \wedge B \xrightarrow{L} C^+}\ \wedge L \qquad \frac{\Delta; \Omega \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, T \xrightarrow{L} C^+}\ TL \qquad \frac{\Delta; \Omega, A \xrightarrow{L} C^+ \quad \Delta; \Omega, B \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, A \vee B \xrightarrow{L} C^+}\ \vee L$$

$$\frac{}{\Delta; \Omega, F \xrightarrow{L} C^+}\ FL$$

Shift

$$\frac{\Delta, P; \Omega \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, P \xrightarrow{L} C^+}\ shift_P \qquad \frac{\Delta, A \supset B; \Omega \xrightarrow{L} C^+}{\Delta; \Omega, A \supset B \xrightarrow{L} C^+}\ shift_\supset$$

Search

$$\frac{P \in \Delta}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} P}\ init \qquad \frac{\Delta; \cdot \xrightarrow{R} A}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} A \vee B}\ \vee R1 \qquad \frac{\Delta; \cdot \xrightarrow{R} B}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} A \vee B}\ \vee R2$$

$$\frac{\Delta, A \supset B; \cdot \xrightarrow{R} A \quad \Delta; B \xrightarrow{L} C^+}{\Delta, A \supset B; \cdot \xrightarrow{L} C^+}\ \supset L$$

Backchaining

$$\begin{array}{lcl} A^-, B^- & ::= & P^- \mid A^+ \supset B^- \mid \forall x.A^-(x) \\ A^+, B^+ & ::= & \downarrow P^- \mid A^+ \wedge B^+ \mid \exists x.A^+(x) \\ \Delta^- & ::= & \cdot \mid \Delta^-, A^- \end{array}$$

Stable Sequent

$$\frac{A^- \in \Delta^- \quad \Delta^-; [A^-] \longrightarrow P^-}{\Delta^- \longrightarrow P^-}\ focusL$$

Left Focus

$$\frac{}{\Delta^-; [P^-] \longrightarrow P^-}\ init^- \qquad \frac{\Delta^-; [B^-] \longrightarrow P^- \quad \Delta^- \longrightarrow [A^+]}{\Delta^-; [A^+ \supset B^-] \longrightarrow P^-}\ \supset L \qquad \frac{\Delta^-; [A^-(M)] \longrightarrow P^-}{\Delta^-; [\forall x.A^-(x)] \longrightarrow P^-}\ \forall L$$

Right Focus

$$\frac{\Delta^- \longrightarrow P^-}{\Delta^- \longrightarrow [\downarrow P^-]}\ \downarrow R \qquad \frac{\Delta^- \longrightarrow [A^+] \quad \Delta^- \longrightarrow [B^+]}{\Delta^- \longrightarrow [A^+ \wedge B^+]}\ \wedge^+ R \qquad \frac{\Delta^- \longrightarrow [A^+(M)]}{\Delta^- \longrightarrow [\exists x.A^+(x)]}\ \exists R$$

Forward Chaining

$$\begin{array}{lcl} A^-, B^- & ::= & \uparrow P^+ \mid A^+ \supset B^- \mid \forall x.A^-(x) \\ A^+, B^+ & ::= & P^+ \mid A^+ \wedge B^+ \mid \exists x.A^+(x) \\ \Delta & ::= & \cdot \mid \Delta, A^- \mid \Delta, P^+ \end{array}$$

Stable Sequent

$$\frac{A^- \in \Delta \quad \Delta; [A^-] \longrightarrow C^+}{\Delta \longrightarrow C^+}\ \mathit{focusL} \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+]}{\Delta \longrightarrow A^+}\ \mathit{focusR}$$

Left Focus

$$\frac{\Delta, P^+ \longrightarrow C^+}{\Delta; [\uparrow P^+] \longrightarrow C^+}\ \uparrow L \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+] \quad \Delta; [B^-] \longrightarrow C^+}{\Delta; [A^+ \supset B^-] \longrightarrow C^+}\ \supset L \qquad \frac{\Delta; [A^-(M)] \longrightarrow C^+}{\Delta; [\forall x.A^-(x)] \longrightarrow C^+}\ \forall L$$

Right Focus

$$\frac{P^+ \in \Delta}{\Delta \longrightarrow [P^+]}\ \mathit{init}^+ \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+] \quad \Delta \longrightarrow [B^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \wedge B^+]}\ \wedge R \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+(M)]}{\Delta \longrightarrow [\exists x.A^+(x)]}\ \exists R$$

Focused Logic

$$
\begin{array}{lcl}
A^-, B^- & ::= & P^- \mid \uparrow A^+ \mid A^+ \supset B^- \mid A^- \wedge^- B^- \mid T^- \\
A^+, B^+ & ::= & P^+ \mid \downarrow A^- \mid A^+ \wedge^+ B^+ \mid T^+ \mid A^+ \vee B^+ \mid F \\
\rho & ::= & A^+ \mid P^- \\
\Delta & ::= & \cdot \mid \Delta, A^- \mid \Delta, P^+ \\
\Omega^+ & ::= & \cdot \mid \Delta, A^+
\end{array}
$$

right inversion	$\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^-$
left inversion	$\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho$
stable sequent	$\Delta \longrightarrow \rho$
left focus	$\Delta; [A^-] \longrightarrow \rho$
right focus	$\Delta \longrightarrow [A^+]$

Right Inversion

$$\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} P^-}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} P^-}\ PR \qquad \frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} A^+}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} \uparrow A^+}\ \uparrow R \qquad \frac{\Delta; \Omega^+, A^+ \xrightarrow{R} B^-}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^+ \supset B^-}\ \supset R$$

$$\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^- \quad \Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} B^-}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} A^- \wedge^- B^-}\ \wedge^- R \qquad \frac{}{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{R} T^-}\ T^- R$$

Left Inversion

$$\frac{\Delta, P^+; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, P^+ \xrightarrow{L} \rho}\ PL \qquad \frac{\Delta, A^-; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, \downarrow A^- \xrightarrow{L} \rho}\ \downarrow L \qquad \frac{\Delta; \Omega^+, A^+, B^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, A^+ \wedge^+ B^+ \xrightarrow{L} \rho}\ \wedge^+ L$$

$$\frac{\Delta; \Omega^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, T^+ \xrightarrow{L} \rho}\ T^+ L \qquad \frac{\Delta; \Omega^+, A^+ \xrightarrow{L} \rho \quad \Delta; \Omega^+, B^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; \Omega^+, A^+ \vee B^+ \xrightarrow{L} \rho}\ \vee L \qquad \frac{}{\Delta; \Omega^+, F \xrightarrow{L} \rho}\ FL$$

$$\frac{\Delta \longrightarrow \rho}{\Delta; \cdot \xrightarrow{L} \rho}\ \textit{stable}$$

Stable Sequent

$$\frac{A^- \in \Delta \quad \Delta; [A^-] \longrightarrow \rho}{\Delta \longrightarrow \rho}\ focusL \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+]}{\Delta \longrightarrow A^+}\ focusR$$

Left Focus

$$\frac{}{\Delta; [P^-] \longrightarrow P^-}\ init^- \qquad \frac{\Delta; A^+ \xrightarrow{L} \rho}{\Delta; [\uparrow A^+] \longrightarrow \rho}\ \uparrow L \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+] \quad \Delta; [B^-] \longrightarrow \rho}{\Delta; [A^+ \supset B^-] \longrightarrow \rho}\ \supset L$$

$$\frac{\Delta; [A^-] \longrightarrow \rho}{\Delta; [A^- \wedge^- B^-] \longrightarrow \rho}\ \wedge^- L1 \qquad \frac{\Delta; [B^-] \longrightarrow \rho}{\Delta; [A^- \wedge^- B^-] \longrightarrow \rho}\ \wedge^- L2 \qquad \text{No left rule for } [T^-].$$

Right Focus

$$\frac{P^+ \in \Delta}{\Delta \longrightarrow [P^+]}\ init^+ \qquad \frac{\Delta; \cdot \xrightarrow{R} A^-}{\Delta \longrightarrow [\downarrow A^-]}\ \downarrow R \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [A^+] \quad \Delta \longrightarrow [B^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \wedge^+ B^+]}\ \wedge^+ R \qquad \frac{}{\Delta \longrightarrow [T^+]}\ T^+ R$$

$$\frac{\Delta \longrightarrow [A^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \vee B^+]}\ \vee R1 \qquad \frac{\Delta \longrightarrow [B^+]}{\Delta \longrightarrow [A^+ \vee B^+]}\ \vee R2 \qquad \text{No right rule for } [F].$$

Linear Logic

Hypothesis

$$\frac{}{\Delta; A\ \mathsf{true} \Vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp \qquad \frac{}{\Delta, A\ \mathsf{valid}; \cdot \Vdash A\ \mathsf{true}}\ hypv$$

Multiplicative Conjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash A \otimes B\ \mathsf{true}}\ \otimes I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A \otimes B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2, A\ \mathsf{true}, B\ \mathsf{true} \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \otimes E$$

Additive Conjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \&\ B\ \mathsf{true}}\ \& I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \&\ B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}\ \& E1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \&\ B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \& E2$$

Disjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I2$$

$$\frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2, A\ \mathsf{true} \Vdash C\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2, B\ \mathsf{true} \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \oplus E$$

Implication

$$\frac{\Delta; \Gamma, A\ \mathsf{true} \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \Vdash A \multimap B\ \mathsf{true}}\ \multimap I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash A \multimap B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2 \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \multimap E$$

Units

$$\frac{}{\Delta; \cdot \Vdash 1\ \mathsf{true}}\ 1I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash 1\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 1E$$

$$\frac{}{\Delta; \Gamma \Vdash \top\ \mathsf{true}}\ \top I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash 0\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 0E$$

Exponential

$$\frac{\Delta; \cdot \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \cdot \Vdash\ !A\ \mathsf{true}}\ !I \qquad \frac{\Delta; \Gamma_1 \Vdash\ !A\ \mathsf{true} \quad \Delta, A\ \mathsf{valid}; \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ !E$$

Ordered Logic

Hypothesis

$$\frac{}{A\ \mathsf{true} \Vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp$$

Multiplicative Conjunction

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash A \bullet B\ \mathsf{true}}\ \bullet I \qquad \frac{\Gamma_2 \Vdash A \bullet B\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, A\ \mathsf{true}, B\ \mathsf{true}, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \bullet E$$

Additive Conjunction

$$\frac{\Gamma \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}\ \&I \qquad \frac{\Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}\ \&E1 \qquad \frac{\Gamma \Vdash A \,\&\, B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \&E2$$

Disjunction

$$\frac{\Gamma \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I1 \qquad \frac{\Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true}}\ \oplus I2$$

$$\frac{\Gamma_2 \Vdash A \oplus B\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, A\ \mathsf{true}, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, B\ \mathsf{true}, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ \oplus E$$

Implication

$$\frac{A\ \mathsf{true}, \Gamma \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \rightarrowtail B\ \mathsf{true}}\ \rightarrowtail I \qquad \frac{\Gamma_1 \Vdash A\ \mathsf{true} \quad \Gamma_2 \Vdash A \rightarrowtail B\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \rightarrowtail E$$

$$\frac{\Gamma, A\ \mathsf{true} \Vdash B\ \mathsf{true}}{\Gamma \Vdash A \twoheadrightarrow B\ \mathsf{true}}\ \twoheadrightarrow I \qquad \frac{\Gamma_1 \Vdash A \twoheadrightarrow B\ \mathsf{true} \quad \Gamma_2 \Vdash A\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash B\ \mathsf{true}}\ \twoheadrightarrow E$$

Units

$$\frac{}{\cdot \Vdash 1\ \mathsf{true}}\ 1I \qquad \frac{\Gamma_2 \Vdash 1\ \mathsf{true} \quad \Gamma_1, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 1E$$

$$\frac{}{\Gamma \Vdash \top\ \mathsf{true}}\ \top I \qquad \frac{\Gamma_2 \Vdash 0\ \mathsf{true}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Vdash C\ \mathsf{true}}\ 0E$$

Modal Logic

Hypothesis

$$\frac{A\ \mathsf{true} \in \Gamma}{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ hyp \qquad \frac{A\ \mathsf{valid} \in \Delta}{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ hypv$$

Conjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}\ \wedge I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}\ \wedge E1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \wedge B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}\ \wedge E2$$

Disjunction

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I1 \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true}}\ \vee I2$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A \vee B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma, A\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma, B\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ \vee E$$

Implication

$$\frac{\Delta; \Gamma, A\ \mathsf{true} \vdash B\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash A \supset B\ \mathsf{true}}\ \supset I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A \supset B\ \mathsf{true} \quad \Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash B\ \mathsf{true}}\ \supset E$$

Truth and Falsehood

$$\frac{}{\Delta; \Gamma \vdash T\ \mathsf{true}}\ TI \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash F\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ FE$$

Necessity

$$\frac{\Delta; \cdot \vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash \Box A\ \mathsf{true}}\ \Box I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash \Box A\ \mathsf{true} \quad \Delta, A\ \mathsf{valid}; \Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash C\ \mathsf{true}}\ \Box E$$

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash \Box A\ \mathsf{true} \quad \Delta, A\ \mathsf{valid}; \Gamma \vdash C\ \mathsf{poss}}{\Delta; \Gamma \vdash C\ \mathsf{poss}}\ \Box E_p$$

Possibility

$$\frac{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{poss}}{\Delta; \Gamma \vdash \Diamond A\ \mathsf{true}}\ \Diamond I \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{true}}{\Delta; \Gamma \vdash A\ \mathsf{poss}}\ here \qquad \frac{\Delta; \Gamma \vdash \Diamond A\ \mathsf{true} \quad \Delta; A\ \mathsf{true} \vdash C\ \mathsf{poss}}{\Delta; \Gamma \vdash C\ \mathsf{poss}}\ \Diamond E$$

Session Types

Disjunction

$$\frac{P : \Delta \longrightarrow x : A}{\mathsf{send}(x, 0); P : \Delta \longrightarrow x : A \oplus B}\ \oplus R1 \qquad \frac{P : \Delta \longrightarrow x : B}{\mathsf{send}(x, 1); P : \Delta \longrightarrow x : A \oplus B}\ \oplus R2$$

$$\frac{P : \Delta, x : A \longrightarrow z : C \quad Q : \Delta, x : B \longrightarrow z : C}{\mathsf{case}(\mathsf{recv}(x), P, Q) : \Delta, x : A \oplus B \longrightarrow z : C}\ \oplus L$$

Additive Conjunction

$$\frac{P : \Delta \longrightarrow x : A \quad Q : \Delta \longrightarrow x : B}{\mathsf{case}(\mathsf{recv}(x), P, Q) : \Delta \longrightarrow x : A \,\&\, B}\ \&R \qquad \frac{P : \Delta, x : A \longrightarrow z : C}{\mathsf{send}(x, 0); P : \Delta, x : A \,\&\, B \longrightarrow z : C}\ \&L1$$

$$\frac{P : \Delta, x : B \longrightarrow z : C}{\mathsf{send}(x, 1); P : \Delta, x : A \,\&\, B \longrightarrow z : C}\ \&L2$$

Units

$$\frac{}{\mathsf{close}(x) : \ \longrightarrow x : 1}\ 1R \qquad \frac{P : \Delta \longrightarrow z : C}{\mathsf{wait}(x); P : \Delta, x : 1 \longrightarrow z : C}\ 1L \qquad \frac{}{\mathsf{abort}(x) : \Delta, x : 0 \longrightarrow z : C}\ 0L$$

$$\frac{}{\mathsf{abort}(x) : \Delta \longrightarrow x : \top}\ \top R$$

Implication

$$\frac{P : \Delta, y : A \longrightarrow x : B}{y = \mathsf{recv}(x); P : \Delta \longrightarrow x : A \multimap B}\ \multimap R$$

$$\frac{P : \Delta_1 \longrightarrow y : A \quad Q : \Delta_2, x : B \longrightarrow z : C}{\mathsf{send}(x, \mathsf{spawn}(y.P)); Q : \Delta_1, \Delta_2, x : A \multimap B \longrightarrow z : C}\ \multimap L$$

Multiplicative Conjunction

$$\frac{P : \Delta_1 \longrightarrow y : A \quad Q : \Delta_2 \longrightarrow x : B}{\mathsf{send}(x, \mathsf{spawn}(y.P)); Q : \Delta_1, \Delta_2 \longrightarrow x : A \otimes B}\ \otimes R \qquad \frac{P : \Delta, y : A, x : B \longrightarrow z : C}{y = \mathsf{recv}(x); P : \Delta, x : A \otimes B \longrightarrow z : C}\ \otimes L$$

Identity

$$\frac{}{\mathsf{forward}(x, y) : x : A \longrightarrow y : A}\ \mathsf{id}$$